ALFRED KUHN

Zum Problem der optimalen Bestellmenge

1964

Zum Problem der optimalen Bestellmenge

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des

akademischen Grades eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft

durch die

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

der Westfälischen Wilhelms-Universität

zu Münster

vorgelegt von

Dipl.-Kfm. Alfred Kuhn

aus Werne / Lippe

1964

1. Berichterstattet: Prof. Dr. Helmut Koch

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Ludwig Pack

Dekan: Prof. Dr. Wolfgang Pikentscher

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1964

Fotodruck: Max Kramer, 44 Münster/Westf. - Aegidiistraße 23

Inhaltsverzeichnis

	Seite:
Verzeichnis der Abbildungen	IV
Verzeichnis der Kurzzeichen	V
Einleitung	1
I. Einordnung des Problems	1
II. Problemstellung	2
1. Bestimmung des Optimalitätskriteriums	2
2. Voraussetzungen des Bestellmengenproblems	3
3. Präzisierung der Probleme	5
a) Das Problem der optimalen Aufteilungsweise	10
b) Das Problem der optimalen Bestellhäufigkeit	14
III. Vereinfachung der Untersuchung	16
IV. Der Untersuchungsgang	17
Erster Hauptteil: Der Stand der Diskussion	18
I. Vorbemerkungen	18
II. Einteilung der Lösungsvorschläge	18
III. Die Diskussion der Lösungen	20
1. Lösungen mit nur einem Bestellintervall	20
2. Lösungen mit gleichgroßen, festliegenden Bestellintervallen	22
3. Lösungen mit vom Verbrauch abhängiger Länge der Bestellintervalle	28
a) Vorbemerkungen	28
b) Das Modell von Wagner und Whitin	29
c) Das Modell von Arrow-Karlin-Scarf	29
d) Das Modell von A. Klingst	33
4. Modelle mit variablen Einstandspreisen im Zeitablauf	35
IV. Ergebnis der Literaturanalyse	35
Zweiter Hauptteil: Die optimale Bestellweise bei veränderlichem Materialverbrauch	37
I. Analyse der durch die Bestellpolitik beeinflußbaren Kosten	37
1. Vorbemerkungen	37
2. Kostenverlauf in Abhängigkeit von der Anzahl der Bestellungen	38

Seite:

3. Entwicklung der Zinskosten in Abhängigkeit vom Aufteilungsmodus 39
4. Das Ergebnis der Analyse 41
II. Allgemeine Lösungsansätze zum Problem der optimalen Bestellweise 41
III. Eine allgemeine Lösung des Problems der optimalen Bestellweise 46
1. Beschreibung des Modells 46
2. Ableitung der optimalen Aufteilungsweise bei gegebener Bestellhäufigkeit 47
3. Die Entwicklung der Bestellmengen und Bestellintervalle 53
4. Ableitung der optimalen Bestellhäufigkeit bei gleichzeitiger Realisierung der optimalen Aufteilungsweise 56
5. Zusammenfassung der Ergebnisse 60
IV. Die optimale Bestellweise unter Ganzzahligkeitsbedingungen 62
1. Beschreibung des Ansatzes 62
2. Die Bestimmung des ganzzahligen Optimums 63
3. Exkurs: Ableitung der Bestellmengenformel aus der allgemeinen Lösung 67
4. Der Nachweis eines Minimums 69
5. Die Freiheitsgrade der Optimumbedingungen 77
6. Das Verhältnis von Zinskosten zu bestellfixen Kosten im Optimum 78
7. Ergebnisse der Lösung unter Ganzzahligkeitsbedingungen 81

Dritter Hauptteil: Optimale Bestellweise bei veränderlichem Verbrauch und bei veränderlichen Preisen 84
I. Vorbemerkungen 84
II. Allgemeine Lösungsansätze bei veränderlichem Verbrauch und bei veränderlichem Preis 84
III. Die optimale Bestellweise bei variablem Verbrauch und variablen Preisen 89
1. Beschreibung des Modells 89
2. Ableitung der optimalen Aufteilungsweise 90
3. Simultane Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit und der optimalen Aufteilungsweise 99
4. Simultanlösung unter Ganzzahligkeitsbedingungen 99

Seite:

a) Die optimale Bestellweise bei veränderlichen Einstandspreisen 100

b) Die optimale Bestellweise bei zeitabhängigen bestellfixen Kosten 105

5. Zusammenfassung der Ergebnisse bei kombinierten Verbrauchs- und Preisänderungen 107

Schlußbemerkungen 111

Literaturverzeichnis 114

Lebenslauf 120

Verzeichnis der Abbildungen

Seite:

Abb. 1: Wirkung verschiedener Aufteilungsweisen auf die Zinskosten bei konstantem Verbrauch 11

Abb. 2: Optimale Aufteilungsweise bei $f(t) = t^2 + 2t$ und zwei Bestellungen 12

Abb. 3: Optimaler Aufteilungsmodus bei konvexer Verbrauchsfunktion 14

Abb. 4: Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit 15

Abb. 6: Ermittlung der Zinskosten bei gegebener Bestellhäufigkeit 40

Abb. 7: Abschätzung der Fehlergröße bei Nichtberücksichtigung bestellfixer Kapitalbeträge 45

Abb. 8: Saisonale Verteilung des Verbrauchs über mehrere Planungsperioden 46

Abb. 9: Verhältnis von Zinskosten und bestellfixen Kosten im Optimum 65

Abb. 10: Gesamtkosten der Beschaffung im Optimum der Bestellweise 66

Abb. 11: Zerlegung von $f(t_n)t_{n-1}$ 79

Abb. 12: Wirkung der Aufteilungsweise auf die Einstandskosten bei sinkendem Einstandspreis 85

Abb. 13: Wirkung der Aufteilungsweise auf die Kapitalbindung bei fallendem Einstandspreis 86

Abb. 14: Entwicklung der Einstandskosten bei steigenden Preisen 93

Abb. 15: Entwicklung der Einstandskosten im Optimum der Bestellweise 102

Abb. 16: Entwicklung der Zinskosten im Optimum 103

Zusammenstellung der Kurzzeichen

Zeichen	Bedeutung des Zeichens	Dimension
K	Gesamte Beschaffungskosten der Planungsperiode	DM
Z, (Z*)	Gesamte Zinskosten(ersparnis) einer Planungsperiode	DM
F	Durch die Bestellweise beeinflußb. Kosten/Stück bei veränderl. Verbr.	DM/Stück
F*	Beeinflußb. Kosten bei veränderl. Verbrauch u. veränderl. Preisen	DM/Stück
F**	Beeinflußb. Kosten bei veränd. Verbrauch u. zeitabh. bestellfixen Kosten	DM/Stück
f(t)	Materialverbrauch im Zeitablauf	Stück
f*(t)	Höhe der Kapitalbindung i. Zeitabl.	(DM/Stck).Stck
p(t)	Höhe d. Einstandspreises i. Zeitabl.	DM/Stück
c	Höhe des konstanten Einstandspreises	DM/Stück
c_o	Höhe eines veränderl. Einstandspreises zu Beginn der Periode	DM/Stück
S	Bestellfixe Kosten je Bestellung	DM
S(t)	Zeitabhängige bestellfixe Kosten	DM
r	Exponent einer Funktion	ohne Dim.
n	Bestellhäufigkeit (Anzahl der Bestellungen in einer Periode)	ohne Dim.
$M \equiv f(t_n)$	Gesamte zu beschaffende Menge in einer Planungsperiode	Stück
$T \equiv t_n$	Dauer der gesamten Planungsperiode	Wochen
$t_k - t_{k-1}$	k-tes Bestellintervall	t (Wochen)
t_k	k-ter Bestellzeitpunkt	t (Wochen)
v	1. Konstantes Bestellintervall 2. Allgemeiner Exponent	t (Wochen) ohne Dim.
ϑ	Verhältnis zweier Größen	
i	Zinsfuß	DM/DM . t
Δ_n	n-dimensionale Determinante	unterschiedl.
$\Delta_n^{*(k)}$	Hauptminorante mit n-k Zeilen und Spalten	unterschiedl.
∇	Nabla (Differentialoperator)	ohne Dim.
$\mathfrak{z}$	n-dimensionaler, um einen Extremwert rotierender Vektor	unterschiedl.
$\mathfrak{t}$	Vektor der Bestellzeitpunkte	t (Wochen)
α, β	Steigung der Verbr.funktion f(t)	Stück/t
a_i	Quotient aus t_{i+1}/t_i	ohne Dim.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547227_0042

Einleitung

I. Einordnung des Problems

Die optimale Dimensionierung der Bestellmenge ist ein Problem der Beschaffungsplanung. Unter Bestellmenge - der Begriff ist in der Literatur nahezu unproblematisch - wird diejenige Beschaffungsteilmenge einer bestimmten Materialart (Roh-, Hilfs- oder Betriebsstoff)[1] verstanden, die durch einen einzigen Einkaufs- oder Bestellakt bezogen wird[2]. Es handelt sich beim Problem der optimalen Bestellmenge also darum, eine innerhalb einer Planungsperiode benötigte Materialmenge bestmöglich auf Beschaffungsteilmengen oder Bestellmengen aufzuteilen.

Da normalerweise Entscheidungen im Absatz- und Fertigungsbereich der Beschaffung vorgelagert sind und somit Vorrang haben[3], hat der Beschaffungsbereich sich nach ihnen zu richten, d.h. die Entscheidungen im Absatz- und Fertigungssektor gehen als Daten in die Überlegungen des Beschaffungsbereichs ein. Es müssen somit Annahmen über diese vorgelagerten Entscheidungen wie z.B. Größe und zeitliche Entwicklung des Absatzes, Produktionsgeschwindigkeit und Produktionsmenge, gewünschter Lagerbestand an Fertigfabrikaten usw. gemacht werden, ehe Überlegungen über die zweckmäßige Art und Weise der Bestellungen

---

1) Vgl. K. Klinger, Der Einkauf im Industriebetrieb, Essen 1950, S. 47

2) Vgl. G. Meyer, Elemente zu einer Beschaffungstheorie des Betriebs, Basel 1951, S. 6; ferner K. Stefanic-Allmayer, Die günstigste Bestellmenge beim Einkauf, in: Sparwirtschaft, Zeitschr. f. d. wirtschaftl. Betrieb, Wien 1927, H. 10, S. 504 ff.; K. Klinger, Der Einkauf im Industriebetrieb, a.a.O., S. 55 ff.; E. Kosiol, Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge, in: ZfB 1958, S. 287 ff.; derselbe, Einkaufsplanung und Produktionsumfang, Berlin 1956, S. 116 ff.; ferner die umfangreiche Literatur über die optimale Losgröße, da im Schrifttum mitunter von einer "Losgröße der Beschaffung" gesprochen wird (E. Sundhoff, Grundlagen und Technik der Beschaffung, Essen 1958, S. 97).

3) Vgl. H. Koch, Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmungspolitik, Wiesbaden 1961, S. 27

angestellt werden können. Damit erweist sich die Bestimmung von optimalen Bestellmengen und Bestellintervallen als bereichsweises Planungsproblem, sofern man unter Planung das Festlegen der Unternehmung für die Zukunft[4] versteht. Es leuchtet ein, daß die Bestimmung eines bereichsweisen Optimums nur im Rahmen einer Partialanalyse vor sich gehen kann. Somit ist das Problem der optimalen Bestellmenge als eines der Planungsprobleme des Beschaffungssektors in die Theorie der Unternehmung einzuordnen.

II. Problemstellung

1. Bestimmung des Optimalitätskriteriums

Optimal ist eine Handlungsweise dann, wenn sie ein angestrebtes Ziel in maximalem Umfang zu realisieren gestattet. Bei der Bestimmung einer optimalen Handlungsweise ist das Teilproblem zu lösen, welche ökonomische Größe die Wirksamkeit der jeweiligen Handlungsweise auf die Realisierung des Ziels am besten auszudrücken vermag. Eine solche Größe wird Optimalitätskriterium genannt.

Oberstes Ziel des Unternehmers ist es, sein Einkommen zu maximieren[5]. Für den Bereich der wirtschaftlichen Unternehmung kann die Einkommensmaximierung ohne großen Fehler mit der Gewinnmaximierung identifiziert werden[6], d.h. der Unternehmer beurteilt den Erfolg oder Mißerfolg seiner Handlungsweise an der Entwicklung des Gesamtgewinns seiner Unternehmung; er legt also seinen Entscheidungen über Art und Umfang des Produktionsmitteleinsatzes das Optimalitätskriterium "Entwicklung des Gesamtgewinns" zugrunde. Von ihm getroffene Maßnahmen sind dann optimal, wenn sie den Gesamtgewinn maximieren.

Geht man davon aus, daß die Gewinnmaximierung oberste Handlungsmaxime des Unternehmers ist, dann muß diese Maxime

---

4) H. Koch, Planung, in: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3. Aufl., Stuttgart 1957, 3. Bd., Sp. 4341; derselbe, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 12 f.

5) H. Koch, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 18 u. S. 23 sowie S. 83 ff.

6) Derselbe, ebenda

für den gesamten Bereich der Unternehmung, also auch für den Beschaffungsbereich, ihre Gültigkeit haben. Nun soll, wie schon vorausgeschickt, der Beschaffungsbereich isoliert, d.h. im Rahmen einer Partialanalyse, untersucht werden. Der Beschaffungsbereich ist dem Absatz und der Fertigung nachgeordnet. Zuerst werden also Entscheidungen im Absatz und in der Fertigung getroffen, die für den Beschaffungsbereich dann innerbetriebliche Daten bilden. Daher ist im Beschaffungsbereich nur eine der beiden Komponenten des Gewinns, nämlich die der Kosten, beeinflußbar. Der Erlös kann, weil er durch keine wie immer geartete Bestellweise zu manipulieren ist[7], aus dem Untersuchungskalkül herausbleiben. Daher wird aus dem Prinzip der Gewinnmaximierung ein solches der Kostenminimierung.

In der Literatur werden mitunter abweichende Optimalitätskriterien genannt, so z.B. Minimierung der Beschaffungszeit[8], Minimierung des Kapitalwerts[9] usw.. Der Ökonom kann solche Kriterien jedoch leicht in Kostentermini ausdrücken, so daß auch in solchen Fällen die Kostenminimierung als allgemeines Optimalitätskriterium Geltung hat.

Optimal ist also eine Bestellweise dann, wenn sie sich durch minimale Beschaffungskosten einer Planungsperiode auszeichnet.

2. Voraussetzungen des Bestellmengenproblems

Damit überhaupt ein Problem der Bestellmengenplanung entsteht, müssen verschiedene Voraussetzungen gegeben sein, die nun genannt werden sollen. Die Beschaffungsmenge M

---

7) Der Einwand, daß die Erlöse durch fehlende Materialmengen zu beeinflussen sind, ist unbeachtlich, denn in einem solchen Fall würden die vorgegebenen Daten, hier z.B. die Bedarfsmenge pro Zeiteinheit, nicht eingehalten.

8) Vgl. hierzu J. Pfanzagl, Die Minimierung sinnloser Größen, in: Unternehmensforschung, Wien, 4/1960, S. 149 ff.; ferner in anderem Zusammenhang auch H. Guetzkow, H.A. Simon, The Impact of Certain Communication Nets upon Organization and Performance in Task-Oriented Groups, in: Management Science, 1/1955, S. 233 ff., insb. S. 237

9) Vgl. E. Schneider, Wirtschaftlichkeitsrechnung, Tübingen 1951, S. 119 ff., insb. S. 121

einer Planungsperiode muß sich in frei wählbare Bestellmengen aufteilen lassen[10]. Lassen die technologischen oder sonstigen Bedingungen des Fertigungsprozesses eine solche Manipulierbarkeit nicht zu, dann existiert auch kein Problem der Bestellmengenplanung.

Ferner müssen gewisse Teile der Beschaffungskosten durch die Bestellpolitik, d.h. durch die zeitliche Aufteilung des Gesamtbedarfs M auf Bestellmengen, beeinflußbar sein. Beeinflußbar sind grundsätzlich nur zwei Kategorien von Kosten: solche, die vom Bestellumfang abhängen, und solche, die von der Anzahl der Bestellungen abhängen. Die letztere Kategorie wird auch bestellfixe Kosten genannt. Alle anderen Kosten, d.h. solche, die durch keine wie immer geartete Bestellpolitik beeinflußbar sind, bleiben für die Ermittlung des Optimums ohne Bedeutung. Hierzu zählen vor allem die beschäftigungsfixen Kosten, d.h. die Kosten des langfristigen Produktionsapparates. Diese Kosten fallen stets in gleicher Höhe an, wie immer auch die Bestellweise beschaffen sein mag. Wenn aber die Bestellweise die beschäftigungsfixen Kosten nicht beeinflussen kann, sind sie für die Ermittlung der optimalen Bestellweise ohne Bedeutung[11]. Ihr Ansatz würde u.U. sogar zu falschen Schlüssen verleiten. Verschiedene Autoren sind jedoch der Meinung, daß den beschäftigungsfixen Kosten entscheidendes Gewicht bei der Bestimmung der optimalen Bestellmenge zukomme[12].

---

10) Vgl. B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, Diss. Göttingen 1961, S. 24

11) Vgl. hierzu auch B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 58 u. S. 63

12) Dieser Meinung ist besonders E. Kosiol (vgl. E. Kosiol, Einkaufsplanung und Produktionsumfang, a.a.O., S. 71 ff., insb. S. 73 ff., S. 76, S. 80 f., S. 87 ff.). Hiernach werden die beschäftigungsfixen Kosten anteilig auf jede Bestellung aufgeteilt unter der Annahme, daß die so ermittelten festen Bezugskosten u n a b h ä n g i g vom Bestellumfang sind. Diese Annahme impliziert, daß die Bestellhäufigkeit ohne Einfluß auf die bestellfixen Kosten je Bestellung ist. Eine solche Annahme läßt sich nur halten, wenn ständige Vollauslastung der mit der Abwicklung der Bestellungen betrauten Abteilungen unterstellt wird, was Kosiol selbst

Forts. siehe S. 5

3. Die Präzisierung der Probleme

Das Problem der optimalen Bestellmenge läßt sich nun wie folgt formulieren: Es ist unter den vom Absatz- und Fertigungsbereich sowie vom Beschaffungsmarkt jeweils gesetzten Bedingungen eine solche Aufteilung des Materialbedarfs auf Bestellungen zu finden, daß die gesamten Beschaffungskosten der Periode minimiert werden. Es ist also mit anderen Worten zu untersuchen, welchen Einfluß die verschiedenen Bedingungen des Absatz- und Fertigungsbereichs sowie des Beschaffungsmarktes auf die Lage des Bestellmengenoptimums haben. Die jeweiligen Entscheidungen der der Beschaffung vorgelagerten Bereiche Absatz und Fertigung (z. B. konstanter Absatz, steigender, fallender oder saisonal schwankender Absatz) sowie die Bedingungen des Beschaffungsmarktes (konstante Einstandspreise, sinkende oder steigende Einstandspreise) gehen somit als Prämissen in das Kalkül der optimalen Bestellmenge ein.

Trotz der Bedeutung, die eine optimale Bestellweise gerade bei materialintensiven Betrieben hat, ist diese Frage noch nicht systematisch, d.h. unter Einschluß aller in Betracht kommenden Bedingungen, behandelt worden. Eine Vielzahl von Lösungsversuchen, insbesondere solcher aus den zwanziger Jahren, befaßte sich mit dem Sonderfall konstanter Beschaffungspreise und konstanten Materialverbrauchs im Zeitablauf[13].

---

13) K. Stefanic-Allmayer, Die günstigste Bestellmenge beim Einkauf, a.a.O., S. 504 ff., insb. S. 506 f.; H. Narath, Die Ermittlung des wirtschaftlich günstigsten Lagerbestandes, des günstigsten Zeitpunktes der Nachbestellung und der Größe des Reserve-Lagerbestandes, in: ZfB IV/1927, S. 473 ff.; K. Andler, Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929, S. 48 ff.; G. Liwschütz, Zur Errechnung der wirtschaftlichen Mindestmenge, in: Werkstattstechnik, Berlin 24/1930, H. 10, S. 273 ff., insb. S.

Forts. siehe S. 6

Forts. d. Fußn. 12) v. S. 4

auch zugibt (vgl. E. Kosiol, Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge, in: ZfB 28/1958, S. 287 ff., hier S. 296); vgl. auch die Kritik von Ottel an dieser Auffassung (F. Ottel, Verschiedene Produktivitäten, in: ZfB 27/1957, S. 487).

Diese Lösung ist später nach mancherlei Richtungen hin erweitert worden. So wurde z.B. die Bedingung der zeitlosen Produktion (gleichbedeutend mit unendlich schneller Beschaffung) durch die Annahme einer zeitinanspruch-

---

Forts. d. Fußn. 13) v. S. 5

274 ff.; F. Zeidler, Der Kosteningenieur, Berlin 1929, S. 135 ff.; B. Marginowski, Wirtschaftliche Lagerhaltung, München-Berlin 1933, S. 10 ff., S. 28; E. Schäfer, Losgröße und Kostengestaltung, in: ZfB, 8/1931, S. 823 ff.; W. Eggemann, Auflagendegression und Lagerhaltung, in: ZfhF 26/1932, S. 376 ff.; A.M. Wolter, Das Problem der Wirtschaftlichkeit bei der industriellen Sortenproduktion, in: ZfhF 31/1937, S. 331-356, S. 374-402, S. 426-442; W. Weigmann, Bestimmung der optimalen Losgröße, in: Technik u. Wirtschaft, 29/1936, S. 45-47; E. Schneider, Absatz, Produktion und Lagerhaltung bei einfacher Produktion, in: Archiv f. mathem. Wirtschafts- u. Sozialforschung, 4/1938, S. 99 ff.; Th.M. Whitin, "Erich Schneiders Inventory Control Analysis", in: Journal of the Operations Research Soc. of America, 2/1954, S. 329-334; C. Straub, Zur Frage der optimalen Losgröße bei Serienfabrikation, in: Schweiz. Zeitschr. f. Betriebsführung, 45/1945, S. 512-518; K. Rummel, Einheitliche Kostenrechnung auf der Grundlage einer vorausgesetzten Proportionalität der Kosten zu betrieblichen Größen, 3. Aufl., Düsseldorf 1949, S. 23 ff.; H. Schmidt, Die wirtschaftliche Mengeneinteilung des rationalen Bedarfs eines Erzeugnisses, Berlin 1942, S. 10 ff.; F. Henzel, Lagerwirtschaft, Essen 1950, S. 46 ff., insb. S. 55 ff.; V. Knecht, Terminwesen und Lagerhaltung in der Massenfertigung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951, S. 33 ff.; E. Schneider, Wirtschaftlichkeitsrechnung, Tübingen u. Bern 1951, S. 119 ff.; T.H. Burnham, D.H. Bramley, Engineering Economics, 2. Bd., Factory Organization and Management, 6. Aufl., London 1950, S. 160 ff.; J.F. Magee, Production Planning and Inventory Control, New York-Toronto-London 1958, S. 44 ff., insb. S. 47 f.; K.W. Hennig, Betriebswirtschaftslehre der industriellen Erzeugung, Wiesbaden 1960, S. 76 ff.; M.K. Starr, D.W. Miller, Inventory Control, Theory and Practice, Englewood Cliffs/N.J. 1962, S. 78 ff.; W. Dahinden, Lagerbewirtschaftung, in: Industrielle Organisation, Zürich, 23/1954, S. 321 ff., insb. S. 327 ff.; H. Markwort, Verfahren zur Abschätzung der günstigsten Seriengröße, in: Werkstatt u. Betrieb, München, 95/1962, S. 221 ff.; H. Ilg, Bestimmung der wirtschaftlichen Losgröße bei verschiedenen Produktionsabläufen, in: Werkstattstechnik, 52/1962, S. 190 ff.; E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1: Die Produktion, 7. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 333 ff.

nehmenden Fertigung (Beschaffung) ersetzt[14], Rabattfunktionen in die Formel eingebaut[15], die Ungewißheit in Sicherheitsmengen berücksichtigt[16] und die Formel auf den Mehrsortenfall erweitert. Dabei ist zwischen einer lediglich formalen Erweiterung[17] und einer Erweiterung unter

14) H. Schlüter, Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 23 ff., insb. S. 40 ff.; J.F. Magee, Production Planning and Inventory Control, a.a.O., S. 55 ff.; H. Narath, Die Ermittlung des wirtschaftlich günstigsten Lagerbestandes, des günstigsten Zeitpunktes der Nachbestellung, der Größe des Reserve-Lagerbestandes, a.a.O., S. 473 ff.; H. Kroner, Wirtschaftliche Losgröße und Fabrikationszeit, in: Werkstattstechnik, 25/1931, S. 99 ff.; G. Liwschütz, Zur Errechnung der wirtschaftlichen Mindestmenge, a.a.O., S. 275 ff.; K. Dürr, Die Bemessung der Auflage in der Serienfabrikation, Bern 1952, S. 13 ff.

15) Vgl. C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, Operations Research, dt. v. E. Schlecht u. F. Ferschl, a.a.O., S. 219 ff.; P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 114 ff.; Th.M. Whitin, The Theory of Inventory Management, a.a.O., S. 34 ff.; E. Kosiol, Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge, a.a.O., S. 287 ff., insb. S. 295; H.H. Böhm, Wirtschaftliche Programmplanung nach Auftragsgrößen und Sorten durch Kalkulation mit Standard-Grenzpreisen und Deckungsbeiträgen, in: Taschenbuch f. d. Betriebswirt, Berlin u. Baden-Baden 1960, S. 127 ff., insb. S. 193 ff.; R.B. Fetter, W.C. Dalleck, Decision Models for Inventory Management, a.a.O., S. 62 f.

16) Vgl. H. Narath, Die Ermittlung des günstigsten Lagerbestandes, des günstigsten Zeitpunktes der Nachbestellung und der Größe des Reserve-Lagerbestandes, a.a.O., S. 475 ff.; O. Mathys, Die Materiallagerwirtschaft im Industriebetrieb, Diss. Genf 1941, S. 102 ff.; S. Malich, Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB, 27/1957, S. 448 ff.; derselbe, Nochmals: Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB, 28/1958, S. 190 ff.; H. Räuscher, Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB, 27/1957, S. 687 ff.; Ch.A. Koepke, Plant Production Control, New York 1950, S. 110 ff.; K.J. Arrow, T. Harris, J. Marshak, Optimal Inventory Policy, in: Econometrica, 19/1951, S. 250 ff., insb. S. 256 ff.; A. Dvoretzki, J. Kiefer, J. Wolfowitz, The Inventory Problem, I. Case of Known Distributions of Demand, in: Econometrica, 20/1952, S. 187-222; dieselben, The Inventory Problem, II. Case of Unknown Distributions of Demand, in: Econo-

Forts. siehe S. 8

17) Siehe S. 8

Einschluß von Restriktionen[18] infolge der Interdependenz zwischen den Sorten zu unterscheiden.

Alle diese erweiterten Lösungsvorschläge bauen jedoch übereinstimmend auf den Annahmen eines im Zeitablauf konstant bleibenden Materialverbrauchs und unverändert bleibender variabler Produktionskosten pro Stück (bzw. eines konstant bleibenden Einstandspreises pro Stück) auf.

Nun ist der Spezialfall der Konstanz von Materialverbrauch und Einstandspreis sicherlich nicht häufig anzutreffen. Nähere Betrachtung des Problems zeigt, daß Einstandspreis und Materialverbrauch im Zeitablauf beträchtlichen Schwankungen unterliegen können. Schwankungen des Einstandspreises im Zeitablauf haben, sofern Mengenrabatte unberücksichtigt bleiben, außerbetriebliche Ursachen. Änderungen des Materialverbrauchs im Zeitablauf können durch folgende Ursachen entstehen:

(1) Veränderlicher Absatz im Zeitablauf;
(2) veränderliche Auftragszusammensetzung;
(3) im Zeitablauf veränderlicher Materialbedarf ein und desselben Auftrags.

Schwankender Absatz führt dann zu schwankendem Material-

18) Vgl. H.J. Zimmermann, Mathematische Entscheidungsforschung, a.a.O., S. 123 ff.; C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, Operations Research, a.a.O., S. 239 ff.; W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, in: ZfhF, 14/1962, S. 167 ff., insb. S. 174 ff.; M.E. Salveson, A Problem in Optimal Machine Loading, in: Management Science, 2/1956, S. 232 ff., insb. S. 248, S. 254 ff. und Fußnote V auf S. 255

Forts. d. Fußn. 16) v. S. 7

metrica, 20/1952, S. 450-466; dieselben, On the Optimal Character of the (s,S) Policy in Inventory Theory, in: Econometrica, 21/1953, S. 586-596

17) Vgl. etwa H.J. Zimmermann, Mathematische Entscheidungsforschung, Berlin 1963, S. 122; R.B. Fetter, W.C. Dalleck, Decision Models for Inventory Management, Homewood/Ill. 1960, S. 63 ff.; J.F. Magee, Production Planning and Inventory Control, a.a.O., S. 58 und andere

verbrauch, wenn absatzsynchrone Fertigung vorliegt. Nun kann sich der Materialverbrauch als Funktion der Zeit[19] aber auch ändern, wenn das kurzfristige Absatzvolumen zwar konstant gehalten wird, aber keine Proportionalität zwischen Dauer der Fertigungszeit und Materialbedarf eines einzelnen Auftrags besteht. So erfordert z.B. der Bau einer Radsatzdrehbank für Lokomotivräder im Verhältnis zur langen Fertigungszeit eine relativ geringe Materialmenge, während für die Produktion von Eisenbahnweichen kleine Fertigungszeiten mit großen Materialmengen üblich sind. Ändert sich die Auftragszusammensetzung, ändert sich auch der Materialverbrauch.

Werden kurzfristiges Absatzvolumen und Auftragszusammensetzung konstant gehalten, so kann eine Änderung des Materialverbrauchs auch dadurch eintreten, daß bei einer gegebenen Materialmenge pro Auftrag keine Linearität zwischen Zeitablauf und Materialbedarf besteht, daß also der Materialbedarf eine nichtlineare Funktion der Zeit[20] bildet. Eine solche Situation kann z.B. beim Bau eines Schiffes entstehen, bei dem zunächst viel Material benötigt wird, später aber der Materialbedarf mit steigender Produktionsreife immer mehr abnimmt.

Es ist also festzuhalten, daß Materialverbrauch und Einstandspreis nur in seltenen Fällen im Zeitablauf konstant bleiben. Damit ist die von einem Teil der Literatur vorgeschlagene Lösung des Bestellmengenproblems nur für Spezialfälle brauchbar. Es erscheint daher sinnvoll, nach Lösungsmöglichkeiten auch für nichtlineare Verbrauchsfunktionen und für veränderliche Preise im Zeitablauf zu suchen. Dieses Anliegen ist umso gerechtfer-

19) Materialverbräuche im Zeitablauf lassen sich als stetige oder diskontinuierliche Funktionen der Zeit auffassen. Eine stetige Materialverbrauchsfunktion wäre z.B. $m = f(t)$, wobei m die unabhängige und t die abhängige Veränderliche ist. Stetige Funktionen setzen infinitesimal kleine Zeiteinheiten voraus, die angenähert durch Tage oder Stunden repräsentiert werden können.

20) Vergleiche Fußnote 19)

tigter, als veränderliche Daten im Zeitablauf - hier sind Materialverbrauch und Einstandspreis gemeint - die allgemeinen Bedingungen des Bestellproblems zu sein scheinen, die den Fall des linearen Verbrauchs und des konstanten Einstandspreises als Sonderfälle umfassen.

Eine allgemeine Behandlung des Bestellproblems erscheint aber auch nicht zuletzt deswegen wünschenswert, als es das Anliegen jeder Theorie ist, möglichst umfassende Aussagen zu machen[21]. In dieser Arbeit soll daher das Bestellmengenproblem unter allgemeineren Bedingungen, also bei veränderlichem Materialverbrauch und bei veränderlichem Einstandspreis, untersucht werden.

Eine nähere Betrachtung des Bestellproblems ergibt zwei Fragestellungen, die hier kurz skizziert werden sollen.

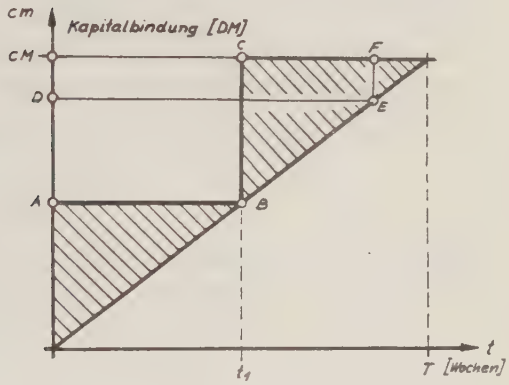
a) Das Problem der optimalen Aufteilungsweise

Die während eines Planungszeitraums insgesamt benötigte Menge M kann in unterschiedlicher Weise auf die einzelnen Bestellungen aufgeteilt werden. Jede Aufteilungsweise hat bei gegebener Bestellhäufigkeit (Anzahl der Bestellungen in einer Planungsperiode) bestimmte Zinskosten zur Folge. Die Aufteilungsweisen müssen der Bedingung genügen, daß die Summe aller Bestellmengen gleich der Gesamtbedarfsmenge zu sein hat. Aufteilungsweisen, die dieser Bedingung genügen, sollen zulässige Aufteilungsweisen genannt werden. Eine Aufteilungsweise ist bei gegebener Bestellhäufigkeit dann optimal, wenn sie sich von allen zulässigen Aufteilungsweisen durch geringste Zinskosten auszeichnet. Die Situation sei mit Hilfe von Abb. 1 für den Fall einer linearen Verbrauchsfunktion und zwei Bestellungen deutlich gemacht:

---

21) Vgl. H. Koch, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, in: Zur Theorie der Unternehmung, Festschr. f. E. Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 368 ff., insb. S. 374 f.

Abb. 1: Wirkung verschiedener Aufteilungsweisen auf die Zinskosten bei konstantem Verbrauch



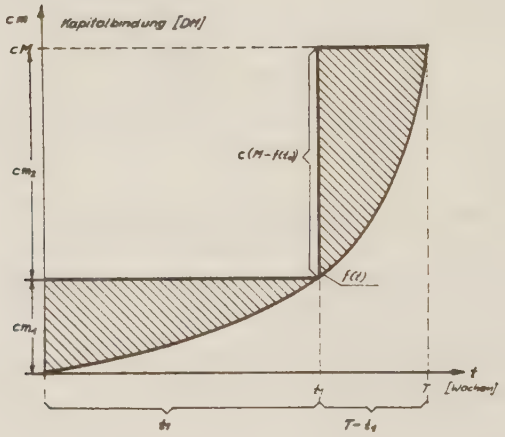
Der Materialverbrauch im Zeitablauf sei konstant und durch die stetige, differenzierbare Funktion f(t) = at mit der Dimension [Stück] repräsentiert. Wir verwandeln diese mengenmäßige Verbrauchsfunktion in eine monetäre, indem wir mit dem Stückpreis c multiplizieren: Es ergibt sich cf(t) = act mit der Dimension [DM]. Auf der Abszisse tragen wir die Zeit und auf der Ordinate das durch die jeweilige Bestellweise gebundene Kapital in DM ab.

Markieren wir nun auf der monetären Funktion den Punkt c . M, also jenen Kapitalbetrag, der während der gesamten Planungsperiode verbraucht wird, so bildet die Strecke OM die geometrische Ortslinie für alle zulässigen, d.h. der Bedingung $cm_1 + cm_2 = cM$ genügenden Aufteilungsweisen. Die durch eine bestimmte Aufteilungsweise verursachten Zinskosten sind in Abb. 1 durch die schraffierten Dreiecksflächen repräsentiert.

Es ist deutlich zu erkennen, daß bei gleichmäßiger Aufteilung von M auf die beiden Bestellungen die Zinskosteneinsparung (repräsentiert durch die Fläche ABCM) größer ist als bei jeder anderen ungleichen Aufteilung (etwa DEFM), wobei der geometrische Anschauungsbeweis genügen mag.

Die Bestimmung der optimalen Aufteilungsweise bei nichtlinearen Verbrauchsfunktionen führt dagegen zu anderen Ergebnissen: Wir definieren die Verbrauchsfunktion f(t) als $f(t) = t^2 + 2t$ und bestimmen wiederum durch Markieren des Punktes c . M die geometrische Ortslinie für alle zulässigen Aufteilungsweisen (vgl. Abb. 2):

Abb. 2: Optimale Aufteilungsweise bei $f(t) = t^2 + 2t$ und zwei Bestellungen



Für die Ermittlung der optimalen Aufteilungsweise ist es gleichgültig, ob die Zinskosten (repräsentiert durch die beiden schraffierten Flächen) minimiert oder ob die Zinskostenersparnis (gleich der Fläche $t_1 \left[M - f(t_1)\right]$) maximiert wird:

$$(1)\quad Z = ic\left\{m_1 t_1 + M(T-t_1) - \int_0^T f(t)dt\right\} \longrightarrow \text{Min.}$$

$$(2)\quad Z^* = ic\left\{t_1\left[M - f(t_1)\right]\right\} \longrightarrow \text{Max.}$$

Bei $f(t) = t^2 + 2t$ ist die Zinskostenersparnis bei zwei Bestellungen:

$$(3)\quad Z^* = ic\left\{t_1 M - t_1 t_1^2 - t_1 \cdot 2t_1\right\}$$

Z^* nimmt dann ein Maximum an, wenn der Differentialquotient dZ^*/dt_1 gerade Null wird:

$$(4)\quad \frac{dZ^*}{dt_1} = ic\left\{M - 3t_1^2 - 4t_1\right\} = 0$$

Da weder der Zinsfuß i noch der Einstandspreis je Stück, c, den Wert Null annehmen kann, erhalten wir

$$(5)\quad 3t_1^2 + 4t_1 = M$$

$$t_1^2 + \frac{4}{3}t_1 = \frac{M}{3}$$

$$t_1 = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4 + 3M}{9}}$$

Wir setzen nun, um ein besseres Vergleichsbild zu haben, $M = 3$[22]:

$$t_1 = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$t_1 = 0.534$$

$$(6)\quad \frac{dZ^{*2}}{dt_1^2} = ic\left\{-6t_1 - 4\right\} < 0, \text{ also Max!}$$

Die zu t_1 gehörige Bestellmenge m_1 erhalten wir aus $m = f(t)$:

$$m_1 = f(t_1) = 0.534^2 + 2 \cdot 0.534 = 1.353$$

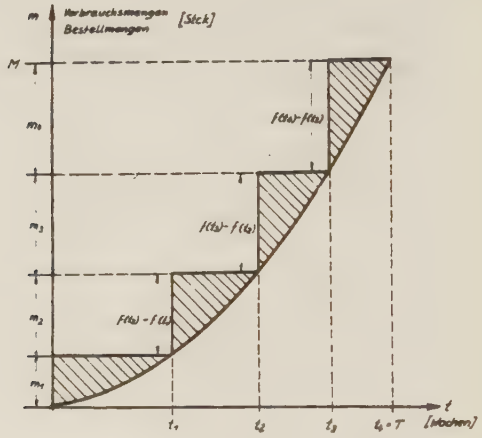
Entsprechend finden wir $t_2 = T - t_1 = 0.466$ und $m_2 = 1.647$. Damit ist bewiesen, daß im Falle nichtlinearer Verbrauchsfunktionen die optimale Aufteilungsweise durch verschieden lange Bestellintervalle bzw. verschieden große Bestellmengen repräsentiert wird. Nur lineare Verbrauchsfunktionen haben gleichlange Intervalle und gleichbleibend große Bestellmengen zur Folge.

Für konvexe, d.h. nach oben gekrümmte Funktionen zeigt sich z.B. folgendes Bild:

---

22) Bei t = 1 ergibt f(t) für M den Wert 3. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß M auch andere, mit f(t) verträgliche Werte annehmen kann, ohne den folgenden Beweis zu beeinträchtigen.

Abb. 3: Optimaler Aufteilungsmodus bei konvexer Verbrauchsfunktion



Nun ergibt sich freilich eine terminologische Schwierigkeit. Im Schrifttum wird überwiegend vom Problem der "optimalen Bestellmenge" gesprochen. Im Fall nichtlinearer Verbrauchsfunktionen besteht die optimale Bestellweise jedoch in einer Folge unterschiedlich großer Bestellmengen. Genau genommen ist es daher nicht korrekt, im Fall nichtlinearer Verbräuche weiterhin im Singular vom "Problem der optimalen Bestellmenge" zu reden. Indessen soll auf die Einführung eines neuen Begriffs verzichtet und trotz der angeführten Bedenken die alte Bezeichnung "optimale Bestellmenge" weiter gebraucht oder aber durch die Umschreibung "optimale Bestellweise" ersetzt werden.

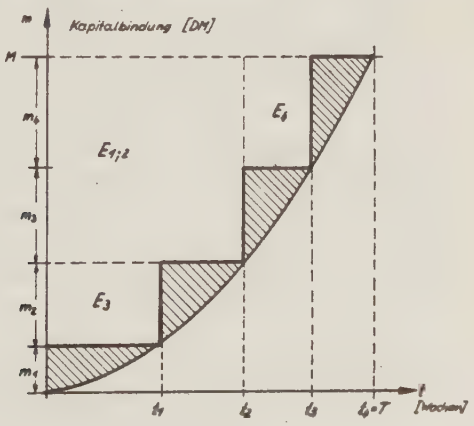
b) Das Problem der optimalen Bestellhäufigkeit

Die Beschaffungskosten je Planungsperiode hängen nun nicht nur von der Aufteilungsweise der Gesamtmenge M auf Bestellungen ab, sondern werden noch von der Anzahl der Bestellungen beeinflußt. Der Einstandspreis möge bei der nun folgenden Betrachtung im Zeitablauf konstant sein. Dann können nur Zinskosten und bestellfixe

Kosten durch eine Variation der Bestellhäufigkeit beeinflußt werden. Die bestellfixen Kosten sind linear abhängig von der Bestellhäufigkeit, wie leicht einzusehen ist. Schwieriger gestaltet sich dagegen die Bestimmung der Abhängigkeit der Zinskosten von der Anzahl der Bestellungen.

Wird nur einmal, nämlich zum Zeitpunkt t_0, bestellt, so entstehen die größtmöglichen, überhaupt erreichbaren Zinskosten. Sie sind proportional dem Integral über der Verbrauchsfunktion in den Grenzen Null und T, wie aus Abb. 4 zu entnehmen ist. Wird dagegen zweimal bestellt, so erspart diese Politik einen durch $E_{1,2}$ repräsentierten Anteil der maximal möglichen Zinskosten. Bei viermaliger Bestellung kommen E_3 und E_4 hinzu usw.. Die tatsächlich anfallenden Zinskosten entwickeln sich proportional der Summe der schraffierten Flächen, die bei steigender Bestellhäufigkeit rasch kleiner wird:

Abb. 4: Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit



Wir können festhalten, daß die Zinskosten mit steigender Bestellhäufigkeit asymptotisch gegen Null gehen. Dagegen steigen die bestellfixen Kosten mit steigender Häufigkeit der Bestellungen - wie wir bereits sahen - linear an. Daraus folgt unmittelbar, daß bei endlicher Bestellhäufigkeit ein Minimum der gesamten Beschaffungskosten existieren muß.

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, daß die Zinskosten nicht nur von der Bestellhäufigkeit, sondern auch noch von der Aufteilungsweise abhängen, wie im übrigen ein Blick auf Abb. 4 bestätigt. Bei der Ermittlung der optimalen Aufteilungsweise aber hatten wir eine gegebene Bestellhäufigkeit unterstellt. Daraus folgt, daß die optimale Aufteilungsweise nicht ohne Kenntnis der optimalen Bestellhäufigkeit und diese nicht ohne die optimale Aufteilungsweise determiniert werden kann. Nur in einem einzigen Spezialfall wirft diese Tatsache keine Schwierigkeiten auf, nämlich bei linearen Verbrauchsfunktionen, denn hier kann der Funktionalzusammenhang zwischen optimaler Aufteilungsweise und optimaler Bestellhäufigkeit durch die einfache Relation $x = M/n$ (x = Bestellmenge) ausgedrückt werden. Eine allgemeiner gehaltene Aussage über die optimale Bestellweise wird jedoch das hier angedeutete Problem lösen müssen.

Das Problem der optimalen Bestellweise kann nunmehr wie folgt präzisiert werden: In Abhängigkeit von den zugrundegelegten Verbrauchs- und Preisfunktionen ist diejenige Bestellweise zu bestimmen, die sich durch die geringstmöglichen Beschaffungskosten pro Stück auszeichnet. Die Beschaffungskosten pro Stück nehmen dann ein Minimum an, wenn es gelingt, für die Aufteilungsweise und für die Bestellhäufigkeit gleichzeitig optimale Werte zu finden.

III. Vereinfachung der Untersuchung

Im Hinblick auf das gesteckte Ziel - Ableitung der optimalen Bestellweise unter allgemeineren Bedingungen als bisher - müssen rigorose Vereinfachungen vorgenommen werden. In Übereinstimmung mit der Literatur[23] wollen wir die gesamten Beschaffungskosten unterteilen in eine Gruppe, die sich hinsichtlich des Bestellumfangs proportional, und in eine zweite Gruppe, die sich bezüglich des Bestellumfangs fix verhält. Da wir die Stückkosten minimieren, können wir sagen, daß die erste Gruppe zu

23) Vgl. Fußnote 13) der Einleitung

mengenmäßig konstanten Stückkosten führt, die - mit c bezeichnet - im Zeitablauf konstant bleibt oder - mit p(t) bezeichnet - sich im Zeitablauf verändert.

Die zweite Gruppe, im Schrifttum gewöhnlich bestellfixe Kosten genannt, führt je nach Bestellumfang zu unterschiedlichen Stückkosten. Die bestellfixen Kosten können wiederum - als S bezeichnet - im Zeitablauf konstant bleiben oder aber - S(t) genannt - im Zeitablauf variieren. Sonstige Nebenkosten (etwa Kosten der Produktionsverzögerung durch Materialengpässe) sowie Kosten von Sicherheitsmengen entfallen, weil unter der Prämisse vollständiger Voraussicht argumentiert wird. Die Möglichkeit von Mengenrabatten bleibt unberücksichtigt.

Ferner werden - nicht immer explizit - solche Untersuchungsbedingungen angenommen, die es gestatten, den Materialverbrauch und die Bewegungen des Einstandspreises je Stück bzw. die Bewegungen der variablen Stückkosten als stetige, differenzierbare Funktionen der Zeit aufzufassen.

IV. Der Untersuchungsgang

In einem ersten Kapitel wird der Stand der Diskussion zum Problem der optimalen Bestellmenge dargelegt.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der optimalen Bestellweise bei nichtlinearem Verbrauch und konstantem Einstandspreis je Stück im Zeitablauf. In einem ersten größeren Abschnitt wird eine allgemeine Lösung des Bestellproblems abgeleitet, aus der dann in einem zweiten größeren Abschnitt unter Ganzzahligkeitsbedingungen weitere Aussagen gewonnen werden.

Im dritten Kapitel wird die Prämisse des konstanten Einstandspreises aufgegeben und durch die Annahme veränderlicher Einstandspreise im Zeitablauf ersetzt. Die Auswirkungen kombinierter Verbrauchs- und Preisänderungen werden zunächst wiederum allgemein und dann unter dem etwas realistischeren Aspekt der Ganzzahligkeitsbedingung der Lösung diskutiert.

Erster Hauptteil: Der Stand der Diskussion

I. Vorbemerkungen

Seit der Amerikaner W. Harris im Jahre 1915[1] und später K. Andler[2] und K. Stefanic-Allmayer[3] im deutschen Sprachraum die Diskussion um die optimale Losgröße bzw. optimale Bestellmenge entfachten, ist eine Fülle von Lösungsvorschlägen in die betriebswirtschaftliche Literatur eingegangen. Es würde zu weit führen, diese oft unwesentlich voneinander abweichenden Meinungen sämtlich darzustellen und einzeln einer kritischen Überprüfung zu unterziehen. Stattdessen sollen die Beiträge nach ihren Prämissen eingeteilt und behandelt werden. Dabei wird die umfangreiche Losgrößenliteratur insoweit einbezogen, als deren Lösungen analog auf das Bestellmengenproblem bei nichtlinearen Verbrauchsfunktionen und/oder veränderlichen Einstandspreisen anzuwenden sind.

II. Einteilung der Lösungsvorschläge

Die im Zeitablauf sich ändernden Bestellmengen und Bestellintervalle bilden die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der optimalen Bestellweise unter der Annahme nichtlinearer Verbrauchsfunktionen. In der Literatur, insbesondere im anglo-amerikanischen Schrifttum, sind hierzu eine ganze Anzahl Lösungsvorschläge angegeben, die sich besonders durch die Handhabung der Bestelltermine voneinander unterscheiden. Es lassen sich folgende vier Gruppen bilden[4]:

1) F.W. Harris, Operations and Cost, Chicago 1915, S. 48-52, zitiert nach F.E. Raymond, Quantity and Economy in Manufacturing, New York 1931, S. 121; vgl. hierzu auch besonders H. Schlüter, Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, Diss. Frankfurt/M. 1958, S. 16, sowie B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 1, Fußnote 2)

2) K. Andler, Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929, S. 48 ff.

3) K. Stefanic-Allmayer, Die günstigste Bestellmenge beim Einkauf, a.a.O., S. 504

4) Siehe S. 19

(1) Es wird nur einmal bestellt, d.h. Planungsperiode und Bestellperiode sind identisch.

(2) Es wird an fixierten, gleichmäßig über die Planungsperiode verteilten Bestellterminen (z.B. an jedem Monatsersten) bestellt, wobei die Bestellmengen ein und derselben Planungsperiode entsprechend der nichtlinearen Verbrauchsfunktion unterschiedlich ausfallen.

(3) Die festen Bestelltermine sind fakultativ, d.h. es wird überlegt, ob es optimal ist, überhaupt zu diesem Termin zu bestellen oder erst zu einem später gelegenen[5]. Wird bestellt, dann muß die für das betreffende Bestellintervall optimale Bestellmenge ermittelt werden[6].

(4) Sowohl Bestellzeitpunkte wie Bestellmengen werden für jedes Intervall in Abhängigkeit von der jeweiligen Verbrauchsfunktion ermittelt.

Ein kurzer Vergleich der vier Gruppen zeigt, daß die Gruppen (1) und (2) und in gewissem Maße auch die Gruppe (3) vereinfachte Annahmen bezüglich der Behandlung der Be-

---

5) Vgl. A. Vazsonyi, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, in: Operations Research, 5/1957, S. 28 ff., insb. S. 30; M.K. Starr, D.W. Miller, Inventory Control, Theory and Practice, Englewood Cliffs/N.J. 1962, S. 88 ff.; G. Hadley, Th.M. Whitin, A Family of Inventory Models, in: Management Science, 7/1961, S. 351; H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Version of Economic Lot Size Model, in: Management Science, 5/1959, S. 89 ff., insb. S. 92 ff., S. 94; dieselben, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, in: Naval Research Logistic Quarterly, 5/1958, S. 58, S. 61 ff.; vgl. auch den Ansatz bei B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 75 ff.

6) Vgl. A. Vazsonyi, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, a.a.O., S. 28 ff.; H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 66 ff., S. 71; G. Hadley, Th.M. Whitin, A Family of Inventory Models, a.a.O., S. 351 ff.; ferner B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 76 ff. sowie Gleichung 1.14 (S. 77)

Fußnote 4) v. S. 18

4) In Anlehnung an eine Einteilung von P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, München-Wien 1962, S. 31

stellintervalle enthalten. Diese Vereinfachungen erfolgen in der Regel, um einen Parameter weniger im Lösungsmodell zu haben[7]. Die vier Gruppen sollen nun nacheinander dargestellt und auf ihre Brauchbarkeit für das gestellte Problem untersucht werden.

III. Die Diskussion der Lösungen

1. Lösungen mit nur einem Bestellintervall

Bei Lösungen dieser Art fällt das Bestellintervall mit der Planungsperiode faktisch zusammen. Die Bestimmung der optimalen Bestellmenge erfolgt isoliert für jedes Bestellintervall. Dadurch ergeben sich eine Reihe rechnerischer Vereinfachungen. Lösungen dieser Art sind von Arrow, Karlin und Scarf[8] sowie von Gebhardt-Seele[9] und anderen Autoren[10] vorgeschlagen worden. Es mag genügen, auf das Modell von Arrow, Karlin und Scarf näher einzugehen, da sich die Lösungen der anderen Autoren nur in unwesentlichen Einzelheiten davon abheben. Folgende Funktionen seien gegeben:

---

7) Vgl. P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 31

8) K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanfort/Cal. 1958, S. 37 ff., S. 61 ff.

9) P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 108 ff., insb. S. 112 ff. sowie Bild 15, S. 112

10) Z.B. F. Morin, Note on an Inventory Problem, in: Econometrica, 23/1955, S. 447 ff.; K.J. Arrow, T. Harris, J. Marshak, Optimal Inventory Policy, in: Econometrica, 19/1951, S. 256 ff.; C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, Operations Research, dt. v. E. Schlecht u. F. Ferschl, a.a.O., S. 200 ff., S. 203 ff., S. 205 ff.; R.J. Freeman, s,S Inventory Policy with Variable Delivery Time, in: Management Science, 3/1957, S. 431 ff., insb. S. 431 u. 432; A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, New York 1958, S. 320 ff.; derselbe, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, dt. v. W. Riedler, Wien 1962, S. 291 ff., S. 298 ff., insb. S. 299; A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, in: Unternehmensforschung, 1/1956/57, S. 166 ff., insb. S. 170 ff.; IBM-Nachrichten, Tägliche vollautomatische Bestandsüberwachung und Auftragsdisposition nach dem Bestellpunktverfahren, H. 130, 1957

$z(t)$ = Bestellmengenfunktion im Zeitablauf,
$r(t)$ = Materialverbrauchsfunktion im Zeitablauf,
$y(t)$ = auf Lager gehaltene Mengen im Zeitablauf,
$c(t)$ = Einstandspreis je Stück im Zeitablauf,
$g(dz/dt)$ = Kosten der Änderung der Bestellrate,
$h(y)$ = Kosten der Lagerung (Zinsen + wertabhängige Lagerkosten) je Stück.

Die während der Planungsperiode auf Lager gehaltene Menge $y(t)$ ergibt sich als Differenz zwischen der bestellten und der verbrauchten Gesamtmenge plus dem Anfangsbestand $y(0)$:

$$(15)\quad y(t) = y(0) + \int_0^T \Big\{ z(t) - r(t) \Big\}\, dt$$

Die Kosten der gesamten Planungsperiode T betragen dann:

$$(16)\quad K(t) = \int_0^T \left\{ c\Big[z(t)\Big] + s\,\frac{dz}{dt} + h\Big[y(t)\Big] \right\} dt$$

Es muß nun eine solche Bestellweise gefunden werden, die $K(t)$ zu minimieren gestattet. Arrow-Karlin-Scarf geben zu, daß eine generelle Lösung des Problems nicht möglich ist[11]. Unter sehr speziellen Bedingungen (Zinskosten gleich Null[12], Materialverbrauch (Absatzvolumen) konstant[13] bzw. in Form diskreter Variablen gegeben[14]) geben sie stattdessen Ober- und Untergrenzen für jedes Bestellintervall an[15], deren Einhaltung jeweils zu prüfen ist. Damit sind theoretischen Aussagen, abgesehen von der Linearitätsbedingung des Materialverbrauchs, die dem hier zu behandelnden Problem nicht gerecht wird, von vornherein enge Grenzen gesetzt.

11) K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, a.a.O., S. 38; vgl. hierzu auch A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 166 ff., S. 169 u. S. 172

12) Vgl. dieselben, ebenda

13) Vgl. Arrow-Karlin-Scarf, Studies in the Mathematical Theory, a.a.O., S. 39, S. 61 ff., insb. S. 66

14) Vgl. dieselben, Studies in the Mathematical Theory, a. a.O., S. 37, S. 66

15) Arrow-Karlin-Scarf, Studies in the Mathematical Theory, a.a.O., S. 37 ff., insb. S. 39 sowie S. 64 ff.

Generell ist an Modellen der oben beschriebenen Art zu kritisieren, daß das Optimum eines Bestellintervalls nicht notwendig auch mit dem Optimum der Planungsperiode identisch sein muß, weil eine isolierte Planung von Intervall zu Intervall die Interdependenz der in der Planungsperiode wirksamen ökonomischen Größen negiert. Eine Lösung entsprechend dem Modell von Arrow-Karlin-Scarf ist nur dann richtig, wenn der Grad der Information (ökonomischer Horizont) nicht über ein Bestellintervall hinausreicht. Das ist jedoch ein spezieller Fall der Ungewißheit, der hier nicht weiter diskutiert werden soll.

2. Lösungen mit gleichgroßen, festliegenden Bestellintervallen

Die Gruppen (2) und (3) unterscheiden sich nur durch die wahlweise vorzunehmende Bestellung voneinander. Um die Darstellung zu vereinfachen, werden daher beide Gruppen in diesem Abschnitt zusammengefaßt.

Die Lösungen mit gleichgroßen, zeitlich fixierten Bestellintervallen sind so aufgebaut, daß eine gegebene Planungsperiode T in n gleichgroße Zeitabschnitte aufgeteilt wird[16]. Die Entwicklung des Materialverbrauchs

16) Vgl. die Modelle folgender Autoren: F. Modigliani, F.E. Hohn, Production Planning over Time and the Nature of the Expectation and Planning Horizon, in: Econometrica, 23/1955, S. 46 ff., S. 62 f.; A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, a.a.O., S. 244, insb. Fig. 11; K.J. Arrow, T. Harris, J. Marschak, Optimal Inventory Policy, in: Econometrica, 19/1951, S. 250 ff., insb. S. 253; dort erfolgt auch eine Bestimmung des durchschnittlichen optimalen Bestellintervalls (S. 254); E. Naddor, Elements of Inventory Systems, in: Operations Research and Systems Engineering, Baltimore 1960, S. 345 ff.; M. Sasieni, Dynamic Programming and Inventory Problems, in: Operational Research Quarterly, 11/1960, S. 43; M. Sasieni, A. Yaspan, L. Friedman, Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, dt. v. H.P. Künzi, Würzburg 1962, S. 77, Abb. 4.2, S. 92 f., S. 96 u. S. 279 ff.; R.W. Shepard, Planung der geringsten Kosten täglicher lokaler Lieferungen, in: Unternehmensforschung, 4/1960, S. 49, S. 51; B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 68 ff., insb. Fig. 13-16; M.B. Schupack, Economic Lot Sizes with Seasonal Demand, in: Operations Re-

Forts. siehe S. 23

wird entweder als stetige differenzierbare Funktion der Zeit[17] oder als Sprungfunktion mit diskreten Verbrauchsmengen[18] angegeben. Bei einem Teil der Modelle wird zusätzlich überlegt, ob es optimal ist, in dem betreffenden Intervall überhaupt zu bestellen oder nicht[19]. Die Lösung ist also um einen "Ja-Nein"-Parameter erweitert. Aus der Fülle der vielen Lösungen soll das Modell von Modigliani-Hohn[20] dargestellt und auf seine Verwendbarkeit

17) Vgl. z.B. K.J. Arrow, T. Harris, J. Marschak, Optimal Inventory Policy, a.a.O., S. 250 ff.; vgl. auch die mittels Fourier-Analyse aus den diskreten Verbrauchsangaben entwickelte stetige Funktion bei M.B. Schupack, Economic Lot Sizes with Seasonal Demand, a.a.O., S. 45 ff., insb. S. 48 f.; A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 166 ff., insb. S. 169

18) F. Modigliani, F.E. Hohn, Production Planning over Time, a.a.O., S. 46 ff.; A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, a.a.O., S. 79 ff., S. 213 ff., S. 227 ff., S. 244 ff.; derselbe, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, a.a.O., S. 86 ff., S. 199 ff., S. 211 ff.; G.J. Feeney, A Basis for Strategic Decision on Inventory Control Operations, in: Management Science, 2/1956, S. 69 ff.; S. Danö, E.L. Jensen, Production and Inventory Planning in a Fluctuating Market, a.a.O., S. 293 ff.; F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, New York-London 1962, S. 107 ff.

19) Vgl. A. Vazsonyi, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, in: Operations Research, 5/1957, S. 28 ff., insb. S. 30; M.K. Starr, D.W. Miller, Inventory Control, Theory and Practice, Englewood Cliffs/N.J. 1962, S. 88 ff.; G. Hadley, Th.M. Whitin, A Family of Inventory Models, in: Management Science, 7/1961, S. 351; H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Version of Economic Lot Size Model, in: Management Science, 5/1959, S. 89 ff., insb. S. 92 ff., S. 94; dieselben, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, in: Naval Research Logistic Quarterly, 5/1958, S. 58, S. 61 ff.; vgl. auch den Ansatz bei B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 75 ff.

20) F. Modigliani, F.E. Hohn, Production Planning over Time, a.a.O., S. 46 ff.

Forts. d. Fußn. 16) v. S. 22

search, 7/1959, S. 46; S. Danö, E.L. Jensen, Production and Inventory Planning in a Fluctuating Market, in: Operations Research, 6/1958, S. 293 ff.; Th.M. Whitin, The Theory of Inventory Management, Princeton/N.J. 1953, S. 19 ff.; Ph. Egerth, Probleme des Produktionsausgleichs, in: Unternehmensforschung, 5/1961, S. 218

für das gestellte Problem untersucht werden, weil es in vielerlei Hinsicht charakteristisch für die unter Fußnote 16) aufgeführten Lösungsvorschläge ist.

Der Materialbedarf der Materialart j im i-ten Bestellintervall möge mit s_{ij}, die entsprechende Bestellmenge mit x_{ij} bezeichnet werden. Beträgt der Anfangsbestand zu Beginn der Planungsperiode T h_o Einheiten, so ist der Lagerendbestand des i-ten Intervalls (i = 1, 2, ... n) durch die Beziehung

(17) $h_{ij} = h_{oj} + X_j - S_j$

gegeben, wobei

(18) $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$

und

(19) $S_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}$

gegeben ist. Die Bestellmengen x_{ij} müssen so bemessen sein, daß der Bedarf s_{ij} in jedem Intervall entweder aus dem Lagerbestand h_{ij} oder durch die Bestellung x_{ij} voll gedeckt werden kann:

(20) $\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + h_{oj}$

wobei negative Bestände (also Materialmangel) durch die Bedingung

(21) $h_{ij} \geqslant 0$

und negative Bestellungen (etwa durch zurückgehende Materialmengen an den Lieferer) durch

(22) $x_{ij} \geqslant 0$

ausgeschlossen sind. Da der Bestand am Ende der Planungsperiode T (also im n-ten Bestellintervall) gleich Null sein soll, gilt ferner

(23) $\sum_{i=1}^{n} h_{io} = \sum_{i=1}^{n} x_{io} + h_{oo} - \sum_{i=1}^{n} s_{io} = 0$

Die Kosten der Lagerung (Zinskosten und wertabhängige Lagerkosten) mögen für die Dauer des i-ten Intervalls für die j-te Materialart pro Stück l_j betragen. Im Durch-

schnitt liegen immer $(h_k + h_{k-1})/2$ auf Lager. Bei einem Anfangsbestand von h_o betragen die gesamten Lagerungskosten somit:

$$(24) \quad L = \sum_{j=1}^{q} l_j \left(\frac{h_o}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{io}\right)$$

denn im letzten Bestellintervall i = n ist der Lagerbestand gemäß der Definitionsgleichung (23) gleich Null.

Die Einstandskosten mögen nun für jede Materialart durch die Beziehung

$$(25) \quad f_{ij}(x_{ij})$$

gegeben sein. Dann betragen die gesamten Einstandskosten C_p für alle Sorten von j = 1, 2, ... q:

$$(26) \quad C_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} f_{ij}(x_{ij})$$

Die fixen Bestellkosten der gesamten Periode mögen C_o betragen. Diese Annahme ist korrekt, weil es sich um eine fixierte, d.h. a priori gegebene Bestellhäufigkeit handelt. Die gesamten Beschaffungskosten der Periode T betragen also:

$$(27) \quad K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} f_{ij}(x_{ij}) + \sum_{j=1}^{q} l_j \left(\frac{h_o}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{io}\right)$$

Diese Kosten sind unter den in den Gleichungen (21) und (22) angegebenen Beschränkungen zu minimieren.

Das eben beschriebene Modell wird von Modigliani-Hohn in verschiedener Weise variiert[21]. Einzelheiten sind jedoch ohne Bedeutung, weil die Kritik mehr am Grundsätzlichen ansetzen soll.

Zunächst ist gegen die Modigliani-Hohn-Lösung vorzubringen, daß die Materialverbrauchsfunktion diskontinuier-

21) Vgl. F. Modigliani, F.E. Hohn, Production Planning over Time, a.a.O., S. 48 ff.; vgl. auch die Zusammenstellung der Modelle bei B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 71 ff. und diejenige bei P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 15 ff., insb. S. 25

lich ist und in numerischen Werten angegeben werden muß. Methoden zur expliziten Bestimmung von Gleichungssystemen von der in Gleichung (27) genannten Art müssen in der Regel aus den mathematischen Programmierungsverfahren gewonnen werden[22]. Das bedeutet, daß der Modigliani-Hohn-Ansatz in der oben beschriebenen Form zur Gewinnung genereller Aussagen ungeeignet ist, denn die Erweiterung des Lösungsbereichs auf mehrere Dimensionen (Bestellmengen für i Zeitintervalle bei j Sorten) "führt zu einer Einengung des Erkenntnisbereichs"[23] und "schließt die Gewinnung allgemeingültiger Erkenntnisse aus"[24]. Diese Behauptung läßt sich daran prüfen, daß bei allen bekannten Programmierungsansätzen wegen der Mutatis-Mutandis-Mechanik nicht a priori ausgesagt werden kann, wie sich eine Veränderung der gesetzten Bedingungen auf die Lösung des Problems auswirkt; ja, es kann nicht einmal eine tendenzielle Voraussage, wie sie jede Näherungsformel ermöglicht, gewonnen werden.

Kritik läßt sich auch daran üben, daß Modigliani-Hohn von vornherein eine Einteilung der Planungsperiode in n gleichgroße Bestellintervalle vornehmen. Die Prämisse, daß eine Planungsperiode a priori in eine gegebene Anzahl gleich großer Intervalle zu zerfallen hat, bedeutet gleich in zweifacher Hinsicht eine Annahme über die erst zu ermittelnde Handlungsweise: Einmal wird die Bestell-

22) Vgl. z.B. die Ansätze bei H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 53 ff., insb. S. 61 ff.; S. Danö, E.L. Jensen, Production and Inventory Planning in a Fluctuating Market, a.a.O., S. 294 f.; F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, a.a.O., S. 107 ff.; vgl. dagegen die Entwicklung einer stetig differenzierbaren Verbrauchsfunktion mittels Fourier-Analyse bei M.B. Schupack, Economic Lot Sizes with Seasonal Demand, a.a.O., S. 48 ff.; aber auch Schupack kommt nicht zu allgemeinen Aussagen, sondern rechnet numerisch weiter (vgl. S. 49 ff.)

23) W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, a.a.O., S. 171

24) W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, a.a.O., S. 171

häufigkeit, zum anderen die Gleichheit der Bestellintervalle als von vornherein optimal unterstellt. Es ist aber durchaus nicht gesagt, daß z.B. die Einteilung einer Planungsperiode von einem Jahr in zwölf gleiche Teile (monatliche Bestellung) oder 52 gleiche Teile (wöchentliche Bestellung) tatsächlich optimal sein muß. Eine solche Aussage könnte nur auf Grund einer voraufgegangenen Optimumbestimmung erfolgen, darf also nie Gegenstand von Prämissen sein. Ferner ist denkbar, daß die Bestellintervalle ungleich lang sein können. Dieser Fall ist zumindest für nichtkonstanten Materialverbrauch nicht von vornherein auszuschließen. Das letzte Problem ist auch von einigen wenigen Lösungsvorschlägen, wenngleich in anderem Zusammenhang[25], gesehen worden[26].

Gemildert, wenn auch nicht aufgehoben, wird diese Unzulänglichkeit durch Einführen eines weiteren Parameters, nämlich den der fakultativen Bestellung[27], d.h. man überlegt bei jedem fixen Bestelltermin, ob es günstig ist, gerade in diesem Bestellintervall oder erst im darauffolgenden oder zu einem noch späteren Bestelltermin zu bestellen. Dadurch werden je nach Materialverbrauch

25) Vgl. die an den Vorschlägen der Gruppe (1) geübte Kritik

26) Vgl. K.W. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, a.a.O., S. 63 ff., insb. S. 66 ff., S. 70 ff.; C.E. Clark, Mathematical Analysis of an Inventory Case, in: Operations Research, 5/1957, S. 634 ff.; R.A. Eagle, Distribution of a Hawaiian Pineapple Company, a.a.O., S. 386 ff.; M.B. Schupack, Economic Lot Sizes with Seasonal Demand, a.a.O., S. 47 ff.; E. Naddor, S. Saltzman, Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs of Ordering, in: Operations Research, 6/1958, S. 680 ff.; E. Naddor, Elements of Inventory Systems, a.a.O., S. 344 ff., S. 349 f.; H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 56 u. 57; R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton 1957, S. 156 ff.; P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 108 ff., S. 112 ff.; A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 167 ff.; M.E. Salveson, A Problem in Optimal Machine Loading, in: Management Science, 2/1956, S. 245 ff.

27) Siehe S. 28

die tatsächlichen Bestellintervalle ungleich lang, nämlich zu ganzzahligen Vielfachen der ursprünglich vorgegebenen und fixierten Zeiträume. Abgesehen von der isolierten Betrachtung jedes einzelnen Bestellintervalls ist das bestenfalls eine grobe Annäherung an das Optimum der Bestellweise.

Zusammenfassend ist an den Lösungen der Gruppe (2) und (3) zu kritisieren, daß diese unter den dort genannten speziellen Annahmen eine Reihe spezieller Ergebnisse liefern, ohne dabei freilich Aufschluß über das Funktionsverhalten des Bestellmengenkalküls zu geben[28], wie es zur Ableitung möglichst umfassender Aussagen über die optimale Bestellweise erforderlich wäre.

3. Lösungen mit vom Verbrauch abhängiger Länge der Bestellintervalle

a) Vorbemerkungen

Aus den bisher diskutierten Lösungsansätzen ging hervor, daß entweder Annahmen über die erst zu bestimmende optimale Handlungsweise gemacht wurden oder aber ein Optimum unter ganz speziellen Voraussetzungen (einmalige Bestellung, gleichgroße Bestellintervalle etc. etc.) ermittelt wurde. Die Untersuchung soll sich nun auf allgemeine Lösungsansätze konzentrieren, die je nach Materialverbrauchsfunktion verschieden große Bestellintervalle und Bestellhäufigkeiten zum Ergebnis haben. Lösungsansätze, die den eben aufgestellten Ansprüchen genügen, sind in der Literatur nur spärlich anzutreffen.

---

28) W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, a.a.O., S. 171

Fußnote 27) v. S. 27

27) Vgl. z.B. A. Vazsonyi, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, a.a.O., S. 28 ff., insb. S. 30; M.K. Starr, D.W. Miller, Inventory Control, Theory and Practice, a.a.O., S. 88 ff.; G. Hadley, Th.M. Whitin, A Family of Inventory Models, a.a.O., S. 351; Th.M. Whitin, Dynamic Version of Economic Lot Size Model, a.a.O., S. 89 ff., insb. S. 92 ff.; dieselben, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 58, S. 61 ff.; vgl. auch den Ansatz bei B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, a.a.O., S. 75 ff.

b) Das Modell von Wagner und Whitin

Wagner-Whitin verstehen unter einem Bestellintervall ein "Zeitintervall, in dem folgende drei Bedingungen erfüllt sind: (a) Der Materialverbrauch ändert sich nicht; (b) die Kosten ändern sich nicht; (c) bestellfixe Kosten fallen nur ein einziges Mal an"[29]. Auf diese Weise gelangen Wagner-Whitin zwar zu unterschiedlich langen Bestellintervallen; jedoch wird das eigentliche Kernproblem, nämlich die Bestimmung der optimalen Intervallänge, unmöglich gemacht. Hinsichtlich der optimalen Bestellhäufigkeit gehen Wagner-Whitin von einer gegebenen Anzahl von Bestellperioden = Bestellintervallen aus[30], womit nicht nur das Problem der Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit umgangen wird, sondern insofern auch ein Widerspruch zur Definition des Bestellintervalls entsteht, als die optimale Anzahl der Intervalle nicht unabhängig von deren optimaler Länge bei gegebener Planungsperiode sein kann.

c) Das Modell von Arrow-Karlin-Scarf

Die schon mehrfach erwähnten Autoren K.J. Arrow, S. Karlin und H. Scarf zeigen ein allgemeines Lagerhaltungsmodell[31], das stark vereinfacht dargestellt und untersucht werden soll.

Arrow-Karlin-Scarf geben für ihr Modell folgende Prämissen an:

x_t = Lagerpegel im Intervall t vor der Bestellung
y_t = Lagerpegel im Intervall t nach der Bestellung
z_t = Bestellmenge im Intervall t
r_t = Materialbedarf im Intervall t

29) H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 56

30) Vgl. H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, a.a.O., S. 63

31) Vgl. K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, a. a.O., S. 27 ff.

$c(z_t)$ = Einstandspreis der Bestellmenge im Intervall t
$h(y_t)$ = Kosten der Lagerung im Intervall t
$G(z_t - z_{t-1})$ = Kosten der Änderung der Bestellrate
L_t = Beschaffungskosten des t-ten Intervalls
a = Zinsfuß des gebundenen Kapitals

Die Beschaffungskosten des Intervalls t sind:

(28) $L_t = L_t(z_t, x_t) = c(z_t) + h(y_t) + G(z_t - z_{t-1})$

wobei

(29) $z_t = y_t - x_t$

und

(30) $x_{t+1} = y_t - r_t$

sind. Ausgehend von diesem statischen Ansatz gelangen Arrow-Karlin-Scarf zu einem den Verbrauchsänderungen angepaßten dynamischen Modell, in dem die Entscheidungen über die Bestellweise nicht mehr totaliter zu Beginn der Planungsperiode, sondern jeweils zu Beginn jedes Bestellintervalls getroffen werden. Dabei sind die Entscheidungen der Vorintervalle in Form einer Entscheidungsfunktion[32] φ berücksichtigt[33], so daß die zu bestellende Menge nicht mehr durch $z_t = y_t - x_t$, sondern durch $z_t = \varphi(x_t)$ determiniert ist.

Diese Verkettung mit den Vorperioden wird durch folgende Beziehung ausgedrückt (λ = Gesamtkostenfunktion):

(31) $\lambda(\varphi, x_1) = L_1(z_1, x_1) + a\lambda(\varphi, x_2)$

Die Kosten der ersten Periode hängen also unmittelbar von der Bestellmenge z_1 und dem Anfangsbestand x_1 ab, die Kosten der folgenden (aller folgenden) Periode(n) sind eine Funktion des jeweiligen Lagerpegels x_i und der stets gleichen Entscheidungsfunktion .

Für eine optimale Bestellweise gilt:

(32) $\lambda^*(\varphi, x_1) = \text{Min}\left\{L_1(z_1, x_1) + a\lambda(\varphi, x_2)\right\}$

---

32) K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, a.a.O., S. 31

33) Dieselben, ebenda

Es bieten sich nun zwei Möglichkeiten an, die Gleichung (32) nach z_i aufzulösen, d.h. die optimale(n) Bestellmenge(n) zu ermitteln:

(c_1) Man macht vereinfachende Annahmen über die optimale Bestellweise $\varphi(x_i)$. Eine solche Annahme, die ziemlich breiten Eingang in die Literatur gefunden hat, ist die sogenannte (s,S)-Maxime: Die Bestellpolitik bewegt sich zwischen zwei Festpunkten, nämlich dem Mindestbestand s und dem Maximalbestand S. Sinkt der Lagerbestand auf oder unter s ab, erfolgt eine Bestellung. Der Parameter (s,S) hängt nur noch von der Verbrauchsfunktion ab und wird mit einer gegenüber der exakten Lösung erheblich einfacheren Rechnung ermittelt[34]. Die (s,S)-Politik kann durch eine Funktion $\varphi(x_i)$ wie folgt beschrieben werden[35]:

(33) $\varphi(x) = 0$, wenn $x \geqslant s$

(34) $\varphi(x) = S - x$, wenn $x < s$

Es leuchtet ein, daß diese Politik unmöglich optimal sein kann, wenn bestellfixe Kosten existieren, denn die Bestellhäufigkeit unterliegt nach dem (s,S)-Modell keinerlei Beschränkungen.

(c_2) Man ermittelt auf rekursivem Wege (dynamisches Programmieren) alle x_i bzw. z_i, indem man von Bestellintervall zu Bestellintervall fortschreitet und die einstufige Gleichung mit n Unbekannten zu einem n-

34) Vgl. die Beispiele bei K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, a.a.O., S. 34 f.; A. Dvoretzki, J. Kiefer, J. Wolfowitz, The Inventory Problem: I. Case of Known Distributions of Demand, a.a.O., S. 189 ff., S. 202 ff.; dieselben, On the Optimal Character of the (s,S) Policy in Inventory Theory, in: Econometrica, 21/1953, S. 586 ff.; R. Bellman, I. Glicksberg, O. Gross, On the Optimal Inventory Equation, in: Management Science, 2/1956, S. 83 ff., insb. S. 92 ff.; M. Alfandary-Alexander, An Inquiry into some Models of Inventory Systems, Pittsburg 1962, S. 24 ff., S. 37 ff., S. 47 ff.; D.L. Iglehart, Optimality of (s,S) Policy in the Infinite Horizon Dynamic Inventory Problem, in: Management Science, 9/1963, S. 259 ff.; M. J. Beckmann, Lagerhaltung bei Unsicherheit, in: Unternehmensforschung, 7/1963, S. 9 ff., insb. S. 15 ff.

35) K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory, a.a.O., S. 34

stufigen Gleichungssystem mit jeweils einer einzigen Unbekannten macht[36]:

$$(35)\quad \lambda(\varphi,x) = L_1(z_1,x_1) + L_2(z_2,x_2) + \ldots + L_n(z_n,x_n)$$
$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \geqslant M$$

Man löst das Subproblem:

$$(35a)\quad \lambda(\varphi,x_1) = \operatorname{Min}\left\{L_1(z_1,x_1)\right\}$$
$$0 \leqslant z_1 \leqslant M$$

$$(35b)\quad \lambda(\varphi,x_2) = \operatorname{Min}\left\{L_2(z_2,x_2) + (\varphi,x_1)\right\}$$
$$0 \leqslant z_2 \leqslant M$$

$$(35c)\quad \lambda(\varphi,x_3) = \operatorname{Min}\left\{L_3(z_3,x_3) + (\varphi,x_2)\right\}$$
$$0 \leqslant z_3 \leqslant M$$

allgemein:

$$(36)\quad \lambda(\varphi,x_i) = \operatorname{Min}\left\{L_i(z_i,x_i) + (\varphi,x_{i-1})\right\}$$
$$0 \leqslant z_i \leqslant M$$

Auf diese Weise gelingt es, alle z_i und x_i rekursiv zu ermitteln. Auch dieser Ansatz kann, wie die wesentlich einfachere (s,S)-Maxime, nur optimal sein, wenn die bestellfixen Kosten gleich Null sind, die Bestellhäufigkeit also ohne Wirkung auf die Beschaffungskosten bleibt. Das Problem der optimalen Bestellhäufigkeit, oder allgemeiner, das Problem der optimalen Anzahl der Bestellintervalle, wird in der Dynamic-Programming-Literatur generell vernachlässigt. Die einzigen Autoren, die das Problem (in anderem Zusammenhang)[37] gesehen haben, geben nur einige allgemeine Richtlinien, aber keine Lösung an[38]. Mithin kann das Dynamic-Programming-Kalkül nicht zu einer allgemeinen Lösung des Bestellmengenproblems verwendet werden.

---

36) Vgl. R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton/N.J. 1957, S. 4 ff., S. 81 ff., S. 152 ff.; A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, a.a.O., S. 219 ff.; derselbe, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, a.a.O., S. 204 ff., S. 211 ff., S. 225 ff.; F. Ferschl, Grundzüge des Dynamic Programming, in: Unternehmensforschung, 3/1959, S. 70 ff., insb. S. 72 f. u. S. 78 ff.

37) Vgl. J.S. Dranoff, I.G. Mitten, W.F. Stevens, L.A. Wanninger jr., Applications of Dynamic Programming to Countercurrent Flow Processes, a.a.O., S. 399

38) Dieselben, ebenda

d) Das Modell von A. Klingst

Eine weitere recht interessante Lösung bietet A. Klingst für den Fall, daß eine regelmäßig wiederkehrende Saisonalschwankung im Materialverbrauch vorliegt[39]. Diese Lösung soll im folgenden vereinfacht dargestellt werden.

Der Materialverbrauch in einem gewissen Zeitabschnitt möge durch die Funktion f(t) repräsentiert werden. Der Zeitpunkt a_i wird als Beginn des i-ten Bestellintervalls und der Zeitpunkt a_{i+1} als dessen Ende festgelegt. Der Bedarf im i-ten Bestellintervall ist also gegeben durch

$$(37) \qquad s = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\{ f(t) \right\} dt = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

Die Entnahme vom Lager ist ferner nicht gleichmäßig, sondern wird $F(t) - F(a_i)$ betragen. Bezeichnet man mit S_i die Startmenge (also die zu Beginn des i-ten Intervalls noch vorhandene Lagermenge), dann liegt zum Zeitpunkt t noch $S_i + F(a_i) - F(t)$ auf Lager. Diese Menge ist zum Zeitpunkt e_i völlig verbraucht. Somit ist $F(e_i) = S_i + F(a_i)$. Nach dem Zeitpunkt e_i ist das Lager bis zum Beginn des neuen Bestellintervalls a_{i+1} leer. Die fehlende Menge zum Zeitpunkt $t \geqslant e_i$ beträgt

$$F(t) - F(e_i).$$

Werden die Kosten der Lagerung pro Stück mit C_1 und die Mangelkosten je Einheit mit C_2 sowie die bestellfixen Kosten mit C_s bezeichnet, dann betragen die gesamten Beschaffungskosten des i-ten Bestellintervalls:

$$(38) \qquad K_i = C_1 \cdot \int_{a_i}^{e_i} \left\{ (S_i + F(a_i) - F(t) \right\} dt + C_s + C_2 \cdot \int_{e_i}^{a_{i+1}} \left\{ F(t) - F(e_i) \right\} dt$$

39) A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 166 ff.; dieselbe, Zur optimalen Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 16 ff.

Nach Umformung von K_i ergeben sich die gesamten Beschaffungskosten der Periode mit

$$(39) \quad K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ C_1 \left[F^*(a_i) - F^*(e_i) \right] + C_2 \left[F^*(a_{i+1}) - F^*(e_i) \right] \right\} + nC_s$$

wobei $F^*(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$ gesetzt ist.

K nimmt ein Minimum an, wenn die partiellen Ableitungen $\partial K / \partial a_i$ gleich Null gesetzt werden. Selbst unter vereinfachten Annahmen[40] erhält man 2^{12} Kombinationen von Möglichkeiten, die a_i auszuwählen[41]. Das ist eine praktisch nicht zu bewältigende Aufgabe.

Nun hilft folgende Überlegung weiter: Es war eingangs die Annahme gesetzt worden, daß der saisonale Zyklus ohne Veränderungen wiederkehrt. Wiederholt sich der Zyklus nach Ablauf der Planungsperiode T, so ist

$$(40) \quad a_{n+1} = a_1 + T$$

Bei vorgegebenem Anfangsbestelltermin (etwa der 1. Januar) läßt sich das in (39) angegebene Gleichungssystem rekursiv lösen, da man nur eine Folge von Bestellterminen zu finden braucht, die der Beziehung (40), nämlich $a_{n+1} = a_1 + T$, genügt[42].

Kritisch ist an dieser Lösung zu bemerken, daß auch sie einen relativ engen Geltungsbereich besitzt, weil sie einmal von festen, vorgegebenen Bestellterminen ausgehen muß und somit das Problem der optimalen Bestellhäufigkeit zwangsläufig vernachlässigt und zum anderen nur für den Fall regelmäßig wiederkehrender saisonaler Verbrauchszyklen anwendbar ist.

---

40) In diesem Falle: Bestellung nur an jedem Monatsersten; vgl. A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 169

41) Vgl. A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 169

42) Vgl. A. Klingst, Zur optimalen Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, a.a.O., S. 17 ff. sowie Abb. 1 u. 2 auf S. 18

4. Modelle mit variablen Einstandspreisen im Zeitablauf

Die in der Literatur diskutierten Lösungen mit veränderlichen Einstandspreisen haben größtenteils Veränderungen des Einstandspreises aufgrund von Mengenänderungen der Bestellweise zum Gegenstand[43]. Ansätze zu einer Berücksichtigung veränderlicher Einstandspreise im Zeitablauf sind nur vereinzelt gemacht worden[44]. Es lassen sich jedoch mit den in der Gruppe (4) beschriebenen Modellen anstelle eines veränderlichen Materialverbrauchs leicht veränderliche Einstandspreise im Zeitablauf berücksichtigen. Es ergeben sich allerdings, da die gleiche Struktur der Lösungen wie im Falle veränderlicher Materialverbräuche vorliegt, keine wesentlich neuen Aspekte der Kritik, weshalb eine Einzeldarstellung unterbleiben kann.

IV. Ergebnis der Literaturanalyse

Eine kritische Prüfung der Vorschläge der Literatur zum Problem der optimalen Bestellweise unter den Bedingungen veränderlichen Materialverbrauchs und veränderlicher Einstandspreise im Zeitablauf ergab, daß eine umfassende Lösung nicht vorliegt. Ein großer Teil der Lösungsvorschläge geht von zu speziellen Annahmen aus (z.B. Bestellintervall identisch mit der Planungsperiode, regelmäßig wiederkehrender saisonaler Zyklus, keine bestellfixen Kosten usw.). Ein anderer Teil setzt willkürlich gleich

43) Vgl. u.a. C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, Operations Research, dt. v. E. Schlecht u. F. Ferschl, a.a.O., S. 219 ff.; F. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 114 ff.; Th.M. Whitin, The Theory of Inventory Management, a.a.O., S. 34 ff.; E. Kosiol, Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge, a.a.O., S. 287 ff., insb. S. 295; H.H. Böhm, Wirtschaftliche Programmplanung nach Auftragsgrößen und Sorten durch Kalkulation mit Standard-Grenzpreisen und Deckungsbeiträgen, in: Taschenbuch f. d. Betriebswirt, Berlin-Baden-Baden 1960, S. 127 ff., hier S. 193 ff.; R.B. Fetter, W.C. Dalleck, Decision Models for Inventory Management, a.a.O., S. 62 f.

44) Siehe S. 36

große Bestellintervalle in a priori vorgewählter Anzahl fest, vernachlässigt also das Problem der optimalen Bestellhäufigkeit. Ein dritter Teil der Lösungen erfordert numerisch determinierte Modellbedingungen, was von vornherein die Gewinnung allgemeingültiger Aussagen unmöglich macht, denn die Programmierungsverfahren bieten keine Handhabe, von einer Änderung der Modellbedingungen auf eine Änderung der Lösung zu schließen, so daß "kein Aufschluß über das Funktionsverhalten des Modells"[45] gegeben werden kann.

Es soll daher im folgenden der Versuch einer umfassenderen Lösung des Bestellmengenproblems unternommen werden, wobei sich die Untersuchung auf die Bestimmung des Optimums bei veränderlichem Materialverbrauch und bei veränderlichen Preisen im Zeitablauf beschränken wird.

---

45) W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, a.a.O., S. 171

Fußn. 44) v. S. 35

44) Vgl. P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, a.a.O., S. 119 ff.; A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, a.a.O., S. 227 ff.; derselbe, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, a.a.O., S. 211 ff.; F. Ferschl, Zum Problem der optimalen Zusatzbestellung, in: Unternehmensforschung, 5/1961, S. 121 ff.

Zweiter Hauptteil: Die optimale Bestellweise bei veränderlichem Materialverbrauch

I. Analyse der durch die Bestellpolitik beeinflußbaren Kosten

1. Vorbemerkungen

In Übereinstimmung mit der Literatur[1] werden in diesem Kapitel konstante Kosten pro Bestellung (bestellfixe Kosten) und konstante Einstandskosten je Stück unterstellt sowie die Lagerkosten als proportional zur Höhe der durch die Bestellpolitik verursachten Kapitalbindung angenommen, so daß diese als Prozentsatz zum Zinsfuß zugeschlagen werden können[2]. Später wird ein Teil dieser einschränkenden Annahmen aufgegeben.

Lassen wir die oben erwähnten Bedingungen gelten, dann folgt daraus, daß nur die Zinskosten und die bestellfixen Kosten sowie die Lagerkosten sich mit einer Variation der Bestellweise ändern. Alle anderen Kostengruppen - so z.B. die Einstandskosten je Stück oder die beschäftigungsfixen Kosten - können wir außer Betracht lassen, weil sie durch keine wie immer geartete Bestellpolitik beeinflußbar sind.

Bezüglich der Veränderung des Materialverbrauchs im Zeitablauf nehmen wir Bedingungen an, die es gestatten, den kumulierten Verbrauch als stetige, differenzierbare Funktion der Zeit zu behandeln. Im allgemeinen wird über den analytischen Gehalt der Verbrauchsfunktion keine Verabredung getroffen, um die Aussage so allgemein wie möglich zu halten. Die Verbrauchsfunktion wird daher schlicht als f(t) bezeichnet. Zur Klassifizierung von Aussagen kann es jedoch erforderlich werden, bestimmte Funktionstypen zu

1) Vgl. hierzu besonders Fußnote 13) der Einleitung

2) Diese Vereinfachung ist genau genommen nicht zulässig; vgl. hierzu besonders L. Pack, Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße, zu einigen Problemen ihrer Ermittlung, in: ZfB, 33/1963, S. 465 ff., insb. S. 475 ff.

unterscheiden. Wir wollen eine Verbrauchsfunktion dann "progressiv" nennen, wenn sie konvex zur Abszisse verläuft. Entsprechend definieren wir "degressiv" mit konkav zur Abszisse und "saisonal schwankend" als abwechselnd konkav und konvex zur Abszisse verlaufend. Außerdem ist zu fordern, daß $f(t)$ monoton steigend und $f'(t) > 0$ ist, denn sonst würde in $f(t)$ ein negativer Verbrauch, also Verkauf von Material, eingeschlossen sein, was die Analyse unnötig erschweren würde.

2. Kostenverlauf in Abhängigkeit von der Anzahl der Bestellungen

Für die bestellfixen Kosten ist die Abhängigkeit von der Anzahl der Bestellungen leicht anzugeben. Der Kostenverlauf ist linear. Streng genommen bilden die bestellfixen Kosten eine Treppenkurve; doch kann man, ohne einen großen Fehler zu machen, diese Treppenkurve durch eine stetige und differenzierbare Gerade ersetzen, was für die Zwecke späterer Optimumbestimmungen von erheblichem Vorteil ist. Schwieriger ist dagegen die Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit zu beschreiben.

Wie wir bereits in der Einleitung (S. 12 u. 13) sahen, fallen die einzulagernden Bestellmengen bzw. die Höhe der einzelnen durch den jeweiligen Bestellvorgang gebundenen Kapitalbeträge je nach der angenommenen Bestellhäufigkeit größer oder kleiner aus. Wird nur einmal, nämlich zum Zeitpunkt t_0, bestellt, dann entstehen die größtmöglichen überhaupt erreichbaren Zinskosten. Sie sind proportional dem Integral über der Verbrauchsfunktion $f(t)$. Bei zweimaliger Bestellung wird bereits ein der Fläche $E_{1,2}$ proportionaler Anteil an Zinskosten gespart; bei viermaliger Bestellung ist die Ersparnis proportional der Flächen $E_{1,2} + E_3 + E_4$ usw.. Die Zinskosten entwickeln sich somit proportional den schraffierten Flächen in Abb. 4, wobei die Proportionalitätskonstante durch den aus Kalkulationszinsfuß und Lagerkostenzinsfuß zusammengesetzten Zinsfuß i definiert ist.

Man sieht sofort, daß die Entwicklung der Zinskosten noch von einem weiteren Parameter abhängig ist, nämlich von der Art und Weise der Aufteilung einer gegebenen Gesamtmenge $f(t_n)$ in Bestellmengen. Für die Bestimmung des Minimums der Zinskosten bzw. der Gesamtkosten pro Stück ergibt sich also die Notwendigkeit, Aufteilungsweise und Bestellhäufigkeit simultan zu bestimmen.

Wir wollen festhalten, daß die Zinskosten bei unverändert beibehaltenem Aufteilungsmodus mit steigender Bestellhäufigkeit asymptotisch gegen Null gehen[3]. Die Tatsache des asymptotischen Verlaufs zusammen mit dem linearen Ansteigen der bestellfixen Kosten läßt vermuten, daß bei einer Bestellhäufigkeit $0 < n < \infty$ ein Minimum der Beschaffungskosten existieren muß.

3. Entwicklung der Zinskosten in Abhängigkeit vom Aufteilungsmodus

Um die Wirkung der Aufteilungsweise auf die Beschaffungskosten isoliert herauszustellen, wird die Bestellhäufigkeit konstant gehalten. Das hat zur Folge, daß die Höhe der bestellfixen Kosten unbeeinflußt vom Aufteilungsmodus bleibt. Somit sind lediglich Zinskosten und Lagerkosten in Abhängigkeit von der Aufteilungsweise zu untersuchen.

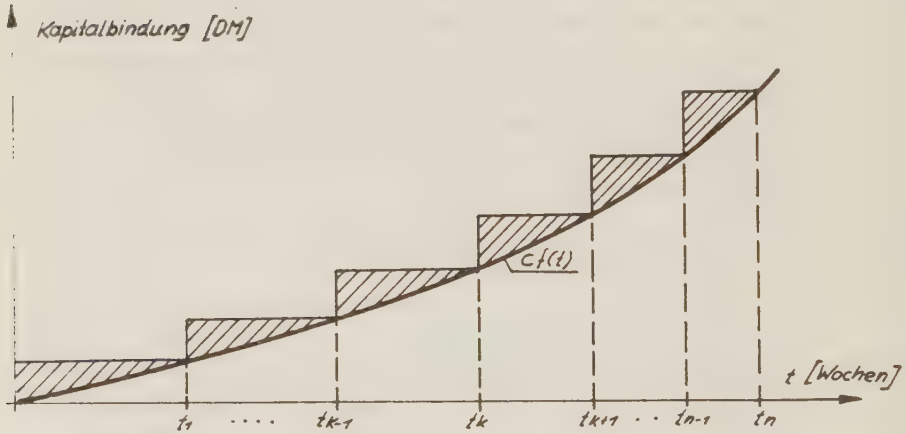
Zinskosten sind grundsätzlich abhängig von der Höhe der Kapitalbindung, d.h. von den jeweils auf Lager liegenden, in den einzelnen Bestellmengen gebundenen Beschaffungsbeträgen, multipliziert mit dem Zinsfuß i und der zugehörigen Lagerzeit t.

Die einzelnen gebundenen Kapitalbeträge setzen sich zusammen aus dem Einstandspreis pro Stück, multipliziert mit der in jedem Bestellintervall beschafften Teilmenge, und dem in jedem Intervall zur Beschaffung aufzuwendenden fi-

3) Genau genommen liegt hier, wie im Fall der bestellfixen Kosten, eine diskontinuierliche Funktion vor, deren Sprünge mit zunehmender Bestellhäufigkeit immer kleiner werden.

xen Kostenbetrag S. Sehen wir einmal von der Komplizierung durch die in die Berechnungsgrundlage für die Zinskosten einzubeziehenden bestellfixen Kapitalbeträge ab, dann läßt sich der Tatbestand durch folgende Skizze geometrisch interpretieren:

Abb. 6: Ermittlung der Zinskosten bei gegebener Bestellhäufigkeit n



Die Höhe der in einem Planungszeitraum durch die jeweilige Aufteilungsweise verursachten Kapitalbindung wird dabei durch die Summe der schraffierten Flächen in Abb. 6 repräsentiert.

Man kommt gemäß Abb. 6 zu folgendem Lösungsansatz: Die Zinskosten pro Stück in einem beliebigen Bestellintervall $t_k - t_{k-1}$, nämlich Z_k, sind

$$(41) \quad Z_k = \frac{ic\left\{f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\}}{f(t_k) - f(t_{k-1})}$$

Das heißt: Die Zinskosten pro Stück im k-ten Intervall sind im Durchschnitt gleich dem Rechteck $f(t_k)$ mal dem Intervallzeitraum $t_k - t_{k-1}$, abzüglich dem Integral unter $f(t)$ in den Intervallgrenzen, dividiert durch die bestellte Stückzahl $f(t_k) - f(t_{k-1})$.

Für den gesamten Planungszeitraum t_n erhalten wir:

$$(42)\quad Z_{ges.} = \frac{ic \sum_{k=1}^{n} \left\{ f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt \right\}}{f(t_n)}$$

In (41) und (42) ist die Zinswirksamkeit der bestellfixen Kapitalbeträge und damit ihr Einfluß auf die Aufteilungsweise vorerst vernachlässigt worden. Diese Vereinfachung wird Gegenstand des nächsten Abschnitts sein.

Die optimale Aufteilungsweise finden wir, wenn Gleichung (42) minimiert wird, denn die optimale Aufteilungsweise zeichnet sich von allen zulässigen Aufteilungsweisen durch die geringsten Zinskosten aus.

4. Das Ergebnis der Analyse

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Entwicklung der Beschaffungskosten in Abhängigkeit von der Bestellweise von zwei Faktoren bestimmt wird:

(1) von der Anzahl der Bestellungen;
(2) von der Aufteilungsweise.

Die Untersuchung der Beschaffungskosten ergab, daß im Optimum beide Parameter simultan determiniert werden müssen. Das bedeutet, daß die optimale Bestellhäufigkeit nicht ohne die optimale Aufteilungsweise und diese nicht ohne optimale Bestellhäufigkeit gefunden werden kann.

II. Allgemeine Lösungsansätze zum Problem der optimalen Bestellweise

Wir hatten eingangs die Prämisse gesetzt, daß die Einstandskosten pro Stück sowohl hinsichtlich des Zeitablaufs wie hinsichtlich der nachgefragten Menge konstant bleiben sollten. Wenn aber die Einstandskosten pro Stück nicht beeinflußbar sind, haben sie für das Optimum der Bestellweise nur insoweit Bedeutung, als sie in die Berechnungsgrundlage für die Zins- und Lagerkosten eingehen.

In Anlehnung an Gleichung (42) werden unter den gesetzten Prämissen die gesamten beeinflußbaren Kosten pro Stück durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$(43)\quad F = \frac{\sum_{k=1}^{n} ic\left\{f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Dabei sind die t_k so numeriert, daß $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist. Diese Forderung wird uns später noch eingehend beschäftigen. Der Summenausdruck im Zähler von (43) entspricht den bereits in (42) beschriebenen Zinskosten; die während des Planungszeitraums insgesamt anfallenden bestellfixen Kosten werden durch das Glied n.S repräsentiert. Die Dimension des Zählers lautet einheitlich [DM], die des gesamten Ausdrucks [DM/Stück].

Gleichung (43) zeichnet sich dadurch aus, daß die bestellfixen Gesamtkosten n.S als zinsunwirksam angesehen werden. Lassen wir diese Einschränkung fallen, so wird ein allgemeiner Lösungsansatz von folgender Form notwendig:

$$(44)\quad F = \frac{\sum_{k=1}^{n} i\left\{\left[cf(t_k)+g(t_k)\right](t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[cf(t)+g(t)\right]dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Die Funktion g(t) verändert sich von Intervall zu Intervall, weil die bestellte Menge $f(t_k) - f(t_{k-1})$ unterschiedlich ausfällt und der Abbau des auf die Stückzahl umgelegten Betrages S auch noch entsprechend f(t) variiert. g(t) hat somit folgende Gestalt:

$$(45)\quad g(t) = sf(t) = \frac{S.f(t)}{f(t_k) - f(t_{k-1})}\ ;$$

$$t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$$

Der vollständige, für alle denkbaren Verbrauchsfunktionen mit der Eigenschaft monotonen Steigens gültige Lösungsansatz lautet somit:

$$(46)\quad F = \frac{\sum_{k=1}^{n} i\left\{f(t_k)(t_k-t_{k-1})(c + \frac{S}{f(t_k)-f(t_{k-1})}\right\}}{f(t_n)} - \frac{\sum_{k=1}^{n} i(c + \frac{S}{f(t_k)-f(t_{k-1})}).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt + nS}{f(t_n)}$$

Es leuchtet ein, daß Ansatz (46) zu recht komplizierten Optimumbedingungen führen wird. Eine Vereinfachung erscheint daher geboten.

Wir wollen zunächst die Größenordnung des Fehlers abschätzen, der durch die Vernachlässigung der bestellfixen Kapitalbeträge bei der Berechnung der Zinskosten entsteht. Zu diesem Zweck werden die durch die Bindung der bestellfixen Kapitalbeträge verursachten Zinskosten Z_S zu den restlichen durch die Bindung der Einstandskosten entstandenen Zinskosten Z_e in Beziehung gesetzt.

Während eines jeden Intervalls $t_k - t_{k-1}$; (k = 1, ..., n-1) ist ein bestellfixer Kapitalbetrag S in der bestellten Menge $f(t_k) - f(t_{k-1})$ gebunden. Die Bindung bleibt nun nicht in voller Höhe bestehen, sondern wird der Verbrauchsfunktion f(t) entsprechend abgebaut:

$$(47)\quad Z_S = iS(t_k-t_{k-1}) - iS \cdot \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt - f(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})}{f(t_k)-f(t_{k-1})}$$

$$(48)\quad Z_S = iS(t_k-t_{k-1}) - \frac{\vartheta f(t_k)(t_k-t_{k-1}) - f(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})}{f(t_k)-f(t_{k-1})}$$

$(0 < \vartheta < 1)$.

(48) läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$Z_S = iS(t_k-t_{k-1}) \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})-\vartheta f(t_k)+f(t_{k-1})}{f(t_k)-f(t_{k-1})}$$

$$(49)\quad Z_S = iS(t_k-t_{k-1}) \frac{f(t_k)(1-\vartheta)}{f(t_k)-f(t_{k-1})}$$

$(0 < \vartheta < 1)$

Ließe man Z_S unberücksichtigt, entstünde ein Fehler. Dieser Fehler soll in Anteilen von Z_e ausgedrückt werden.

$$(50)\quad Z_e = ic\left\{ f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt \right\}$$

$$Z_e = ic \cdot f(t_k)(t_k - t_{k-1})(1-\vartheta)$$

$$(51)\quad \frac{Z_S}{Z_e} = \frac{iS(t_k - t_{k-1})\ \frac{f(t_k)(1-\vartheta)}{f(t_k)-f(t_{k-1})}}{ic \cdot f(t_k)(t_k - t_{k-1})(1-\vartheta)}$$

$$(52)\quad \frac{Z_S}{Z_e} = \frac{S}{c\left\{f(t_k)-f(t_{k-1})\right\}} = S/\text{Einstandskosten}$$

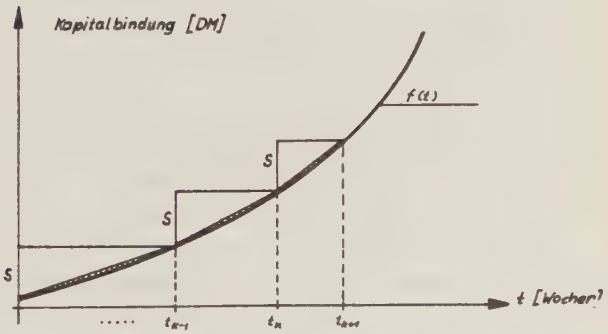
Wir sehen, daß der Fehler, der durch Nichtberücksichtigung der bestellfixen Kapitalbeträge bei der Berechnung der Zinskosten in jedem Intervall entsteht, von der Höhe der bestellfixen Kosten, der Höhe der Einstandskosten pro Stück und der bestellten Stückzahl abhängt und sich außerdem von Intervall zu Intervall wegen der sich ändernden Bestellmenge mitverändert. Und zwar wird der Fehler bei allen degressiv verlaufenden Verbrauchsfunktionen ständig größer, bei allen progressiv verlaufenden Funktionen ständig kleiner, je weiter k abgezählt wird. Die ermittelte Größenordnung des Fehlers, nämlich S/Einstandskosten, ist in Wirklichkeit noch erheblich kleiner, wie folgende Betrachtung zeigen soll.

Für den linearen Fall gilt $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) = at_n$ und $\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = t_n$. Die gesamten Zinskosten pro Stück, Z, betragen somit gemäß Gleichung (46):

$$(53)\quad Z = \frac{ic\ \frac{at_n^2}{2} + iS\ \frac{at_n^2}{2at_n}}{at_n}$$

$$Z = \frac{ict_n}{2} + \frac{iS}{2a}$$

Abb. 7: Abschätzung der Fehlergröße bei Nichtberücksichtigung bestellfixer Kapitalbeträge



(53) bedeutet, daß bei linearen Verbrauchsfunktionen das Glied iS/2a beim Differenzieren herausfällt, also keinen Einfluß auf die Lage des Optimums der Bestellweise nimmt.

Im Fall nichtlinearer Funktionen läßt sich zeigen, daß der bestellfixe Kapitalbetrag dann ohne Einfluß auf das Optimum bleibt, wenn man einen konstanten Bruchteil von S, z.B. S/2, als im Mittel während des Intervalls gebunden betrachtet[4]. Nun ist, wie Gleichung (49) zeigt, der im Durchschnitt gebundene Bruchteil von S nicht konstant, sondern ändert sich mit dem Funktionswert der Verbrauchsfunktion. Man brauchte also nur noch die Segmente aller Intervalle aus Abb. 7 als zinswirksamen Betrag von S ansetzen, um den Einfluß der bestellfixen Kapitalbeträge aller Intervalle auf das Optimum zu berücksichtigen. Dieser Einfluß aber ist, wie sich schon durch Augenschein zeigt, so gering, daß er ohne Bedenken vernachlässigt werden kann.

4) Wenn man z.B. Gleichung (43) durch den Ausdruck $(iS/2)(t_k-t_{k-1})$ erweitert, fällt das Glied beim Differenzieren nach t_k wieder heraus.

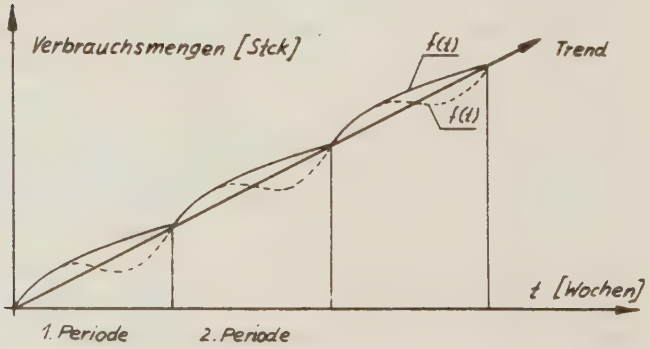
Im folgenden wird also stets mit dem vereinfachten Lösungsansatz (43) gerechnet.

III. Eine allgemeine Lösung des Problems der optimalen Bestellweise

1. Beschreibung des Modells

Der ökonomische Horizont des Unternehmers sei so bemessen, daß innerhalb einer fixierten Planungsperiode völlige Gewißheit über die zeitliche Entwicklung des Materialverbrauchs vorliegt. Das möge im einzelnen bedeuten, daß die zu beschaffende Gesamtmenge $f(t_n)$ vorgegeben ist und daß sich die zeitliche Verteilung des Verbrauchs auf die einzelnen Zeiteinheiten (Tage, Wochen) durch eine stetige, differenzierbare Funktion der Zeit beschreiben läßt. Die zeitliche Verteilung kann nun saisonal sein, wobei die saisonale Schwankung des Verbrauchs (vgl. Abb. 8) in degressiven, progressiven oder regelmäßigen Bewegungen um einen Trend bestehen kann.

Abb. 8: Saisonale Verteilung des Verbrauchs über mehrere Planungsperioden



Die zeitliche Verteilung des Verbrauchs kann aber auch durch eine Funktion mit zunächst großen, dann immer kleiner werdenden Zuwächsen charakterisiert sein, wie

wir sie etwa bei der Anlaufphase nach einer Betriebsgründung mit nachfolgender Stabilisierung auf konstantem Niveau des Verbrauchs vorfinden.

Das Problem lautet nun, eine solche zeitliche Verteilung der Gesamtmenge $f(t_n)$ auf Bestellmengen bei gegebener zeitlicher Verteilung des Verbrauchs zu finden, daß die Beschaffungskosten pro Stück ein Minimum annehmen.

2. Ableitung der optimalen Aufteilungsweise bei gegebener Bestellhäufigkeit

Wir gehen vom vereinfachten Lösungsansatz (43) aus. Die Funktion (43)

$$(43)\quad F = \frac{\sum_{k=1}^{n} i\left\{cf(t_k)(t_k - t_{k-1}) - c \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

ist zu minimieren, wenn die Aufteilungsweise optimal sein soll. Wir wollen die t_k so numerieren, daß $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist. Das bedeutet im einzelnen, daß der Vektor $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ aus einem n-dimensionalen Gebiet $\mathfrak{G}$ zu wählen ist, welches durch Ungleichungen folgender Art definiert wird:

$$(54)\quad \begin{array}{ccccc} 0 & < & t_1 & < & t_2 \\ t_1 & < & t_2 & < & t_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_{n-2} & < & t_{n-1} & < & t_n \end{array}$$

Hierbei werden die jeweils mittleren t_k als Variable aufgefaßt, die sich den recht und links genannten Grenzen beliebig nähern können, ohne sie indes zu erreichen. Innerhalb des durch die in (54) genannten Bedingungen beschränkten Gebietes $\mathfrak{G}$ sind die t_k völlig frei wählbar. Damit ist F als Funktion der n-1 veränderlichen t_k determiniert (über t_n wurde bereits durch die Forderung $f(t_n)$ = gesamte Bedarfsmenge verfügt)[5]:

---

5) Siehe S. 48

(55) $F = F(\mathfrak{t}) = F(t_1, \ldots, t_n)$

Soll die Funktion der t_k in einem Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ einen Extremwert aufweisen, so muß gelten:

(56) $\delta F = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{\mathfrak{t}_o} \delta t_k = 0$

Aus (56) folgt, daß im Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ alle $\partial F/\partial t_k$ gleich Null sein müssen, denn da die t_k innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ voneinander unabhängig sind, können die δt_k beliebige geeignet kleine Werte annehmen. Wäre daher für ein bestimmtes t_k an der Stelle $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ das zugehörige $\partial F/\partial t_k$ ungleich Null, so könnte man δt_k so wählen, daß δF ungleich Null sein wird. Das aber ist ein Widerspruch zur Bedingung (56). Aus (56) folgt somit, daß für einen Extremwert im Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ alle $\partial F/\partial t_k$ gleich Null sein müssen.

Für die ersten n-1 t_k gilt also

$$(57)\quad \frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} ic\left[f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right] + nS}{f(t_n)}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{ic}{f(t_n)}\left\{f'(t_k)(t_k - t_{k-1}) + f(t_k) - f(t_{k+1}) + f(t_k) - f(t_k)\right\} = 0$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$

Da weder ic noch $f(t_n)$ gleich Null werden können, läßt sich (57) wir folgt schreiben:

(58) $f'(t_k)(t_k - t_{k-1}) + f(t_k) - f(t_{k+1}) = 0$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$

Fußnote 5) v. S. 47

5) Bei vorgegebenem $f(t_n)$ lautet die Vorschrift: $\delta t_n = 0$. Man könnte der Meinung sein, daß hier ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen vorliegt, daß also ein Lagrange-Ansatz erforderlich wird. Es sind jedoch alle t_k bis auf t_n in weiten Grenzen frei wählbar. Über t_n herrscht durch das vorgegebene $f(t_n)$ völlige Klarheit, so daß der Lagrange-Ansatz eine einzige Gleichung liefert, die zwar mit den $(\partial F/\partial t_k).\delta t_k$ verträglich ist, aber überflüssig sein wird, weil keine zusätzliche Information zu gewinnen ist.

Für das letzte t_k, nämlich t_n, gilt voraussetzungsgemäß ($\delta t_n = 0$):

$$(59)\ \frac{\partial F}{\partial t_n} = 0$$

Wenn wir (58) umformen, erhalten wir die Bedingung für die optimale Aufteilung einer fixierten Planungsperiode in Bestellintervalle:

$$(60)\ t_k - t_{k-1} = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{f'(t_k)}$$

Gleichung (60) besagt, daß das k-te Bestellintervall gleich der k+1-ten Bestellmenge, dividiert durch das Änderungsvermögen der Verbrauchsfunktion im Zeitpunkt der k+1-ten Bestellung, sein muß, wenn es seine optimale Länge besitzen soll. Die Verkettung der Intervalle untereinander wird aus (60) gut sichtbar. Indem Beziehung (60) n-mal angewandt wird, lassen sich bei vorgegebenem n alle Intervalle optimal auf rekursivem Wege ermitteln, weshalb (60) auch als "Rekursionsformel" bezeichnet werden soll.

Zur Bestimmung der n Intervalle gehen wir wie folgt vor: Das erste Intervall errechnet sich aus folgender Beziehung:

$$t_1 - t_o = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f'(t_1)}$$

Da t_o verabredungsgemäß gleich Null ist, gelingt es, eine Beziehung zwischen t_1 und t_2 herzustellen:

$$t_1 = a_1 t_2$$

Es wird nun das nächste Intervall berechnet:

$$t_2 - t_1 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{f'(t_2)}$$

Wir setzen $t_1 = a_1 t_2$:

$$t_2 - a_1 t_2 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{f'(t_2)}$$

Somit gelingt es, eine Beziehung zwischen t_2 und t_3 herzustellen: $t_2 = a_2 t_3$ usw., bis n-1 Intervalle durchlaufen sind. Im n-ten Intervall setzen wir den bekannten Wert für $t_n \equiv T$ ein und ermitteln so rückwärtsschreitend alle t_k, da die Relationen zwischen den t_k ja durch die a_i; (i = 1, 2, ..., n-1); zuvor optimal determiniert wurden.

Gleichung (60) gilt für beliebige lineare und nichtlineare Verbrauchsfunktionen, sofern sie nur stetig und differenzierbar sind und im Zeitablauf monoton ansteigen. Bei bestimmten Funktionen kann die numerische Berechnung der einzelnen t_k Schwierigkeiten machen. Darauf soll kurz eingegangen werden. Wir können einfache Potenzfunktionen vom Typ $f(t) = \alpha t^r$ aus der Betrachtung ausklammern, weil sie keinerlei Schwierigkeiten machen und zudem an anderer Stelle (vgl. S. 56 f.) ein Beispiel gerechnet wird.

Für beliebige Polynome vom Typ $f(t) = \sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu t^\nu$ soll gelten:

$$(60)\quad t_k - t_{k-1} = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{f'(t_k)}$$

Wir stellen (60) geringfügig um, erhalten

$$(61)\quad t_{k-1} = \frac{f(t_k) - f(t_{k+1})}{f'(t_k)} + t_k$$

und setzen f(t) ein:

$$(62)\quad t_{k-1} = \frac{\sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu t_k^\nu - \sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu t_{k+1}^\nu}{\sum_{\nu=1}^{r} \nu \cdot \alpha_\nu t_k^{\nu-1}} + t_k$$

$$t_{k-1} = \frac{\sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu (t_k^\nu - t_{k+1}^\nu)}{\sum_{\nu=1}^{r} \nu \cdot \alpha_\nu t_k^{\nu-1}} + t_k$$

Zur numerischen Berechnung der einzelnen t_k kehren wir den allgemeinen, oben angegebenen Rechengang um, d.h.

wir beginnen mit dem für t_n vorgegebenen numerischen Wert und berechnen aus (61) rückwärtsschreitend die Relation zwischen t_{n-1} und t_{n-2}, sodann diejenige von t_{n-2} und t_{n-3} usw. bis t_o erreicht ist.

Läßt die rechte Seite von (62) die Division durch $f'(t_k)$ nicht zu, kann man sich mit folgendem Verfahren helfen: Man beginnt mit dem für t_n vorgegebenen Wert und nimmt einen geeignet erscheinenden numerischen Wert für t_{n-1} an. Die restlichen t_k lassen sich bei vorgegebener Bestellhäufigkeit aus (62) leicht berechnen. Im allgemeinen wird man auf diese Weise nicht für t_o den Wert Null erhalten. Wir können nun entweder t_n so abändern, daß sich $t_o = 0$ ergibt; wir können die Bestellhäufigkeit auf einen nicht-ganzzahligen Wert abändern oder aber den Rechengang solange mit einem geeigneten Wert für t_{n-1} wiederholen, bis $t_o = 0$ erreicht ist. Das Verfahren erscheint auf den ersten Blick umständlich, hat aber den Vorzug, programmierbar zu sein und auch für komplizierte Verbrauchsfunktionen zum Ziel zu führen.

Für Gleichung (62) sei nach dem letzten Verfahren ein einfaches Beispiel gegeben:

Wir definieren $f(t) = t^2 + 2t$; $n = 4$; $t_n = t_4 = 1$. Aus (62) erhalten wir:

$$t_2 = \frac{t_3^2 + 2t_3 - t_4^2 - 2t_4 + 2t_3^2 + 2t_3}{2t_3 + 2}$$

$$t_2 = \frac{3t_3^2 + 4t_3 - 1 - 2}{2t_3 + 2}$$

Wir nehmen nun für t_{n-1}, also hier für t_3, einen geeignet erscheinenden Wert, z.B. $t_3 = 0{,}78$, an:

$$t_2 = \frac{3 \cdot 0{,}78^2 + 4 \cdot 0{,}78 - 3}{2 \cdot 0{,}78 + 2} = 0{,}546$$

Durch weiteres Benutzen von (62) erhalten wir:

$$t_1 = \frac{3t_2^2 + 4t_2 - t_3^2 - 2t_3}{2t_2 + 2}$$

$$= \frac{3 \cdot 0{,}546^2 + 4 \cdot 0{,}546 - 0{,}78^2 - 2 \cdot 0{,}78}{2 \cdot 0{,}546 + 2}$$

$$t_1 = 0{,}294$$

Mit Hilfe von (62) können wir das Ergebnis überprüfen:

$$t_o = \frac{3t_1^2 + 4t_1 - t_2^2 - 2t_2}{2t_1 + 2}$$

Es muß, da $t_o = 0$, also gelten:

$$3t_1^2 + 4t_1 - t_2^2 - 2t_2 = 0$$

$$3.0{,}294^2 + 4.0{,}294 - 0{,}542^2 - 2.0{,}542 = 0$$

$$1{,}39 - 1{,}43 \neq 0$$

Wir entnehmen aus dem Ergebnis, daß der Wert für t_3 ($t_3 = 0{,}78$) etwas zu klein gewählt worden ist. Durch Iteration läßt sich mit Hilfe von (62) das Ergebnis beliebig genau ermitteln.

Das gleiche gilt für e-Funktionen. Auch hier führt eine Division von Zähler durch Nenner der rechten Gleichungsseite von (62) nicht zum Ziel. Wir definieren $f(t) = ae^{\beta t}$. Nach (61) erhalten wir:

$$(63)\quad t_{k-1} = \frac{e^{\beta t_k} - e^{\beta t_{k+1}}}{\beta \cdot e^{\beta t_k}} + t_k$$

$$t_{k-1} = \frac{1}{\beta}\left\{1 - e^{\beta(t_{k+1} - t_k)}\right\} + t_k$$

d.h. wir müssen ein vollständiges Intervall, also zwei benachbarte Bestellzeitpunkte, annehmen, um alle t_k ermitteln zu können. An sich würde die Vorgabe eines Bestellzeitpunktes beliebiger Ordnungszahl zusammen mit der Anfangsbedingung $t_o = 0$ ausreichen, alle t_k zu determinieren; zur technischen Bewältigung der Rechnung ist es aber erforderlich, drei hintereinanderliegende t_k vorzugeben, um ein endloses Probieren zu vermeiden.

Aus den bisherigen Ergebnissen, insbesondere aus den Gleichungen (58), (62) und (63) folgt, daß die optimale Aufteilungsweise unabhängig von der Länge der Planungsperiode, von der Höhe des Zinsfußes und der Höhe der bestellfixen Kosten ist. Die Länge der Planungsperiode determiniert lediglich die absolute Länge jedes einzelnen Bestellintervalls, läßt aber die Relationen zwischen ihnen unverändert, während die anderen genannten Größen keinerlei Einfluß haben. Das gleiche gilt natürlich auch hinsichtlich der Bestellmengen.

Die Rekursionsformel (58) bzw. (62), die zur vollständigen Bestimmung aller t_k n-1-mal anzuwenden ist, enthält n+1 variierbare Größen. Eine Lösung des Systems ist erst dann bestimmt, wenn genau zwei der variierbaren Größen vorgegeben werden. Das Problem der optimalen Aufteilungsweise besitzt somit zwei Freiheitsgrade.

3. Die Entwicklung der Bestellmengen und Bestellintervalle

Wie aus den Gleichungen (58) bzw. (60) und (62) hervorgeht, ändert sich die Länge der optimalen Intervalle ständig. Und zwar werden die Intervalle für alle progressiven (degressiven) Verbrauchsfunktionen ständig kleiner (größer), weil die erste Ableitung der Verbrauchsfunktion bei progressiven (degressiven) Funktionen ständig positiv und größer (positiv und kleiner) wird, wenn k die natürlichen Zahlen durchläuft. Das soll für je ein Beispiel einer progressiven und einer degressiven Funktion gezeigt werden.

Wir definieren $f(t) = \alpha t^2$. Dann ergibt sich gemäß Gleichung (62):

$$(64)\quad t_k - t_{k-1} = \frac{\alpha t_{k+1}^2 - \alpha t_k^2}{2\alpha t_k} = \frac{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}+t_k)}{2t_k}$$

$$(65)\quad \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k} = \frac{t_{k+1}+t_k}{2t_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t_{k+1}}{t_k}$$

Da laut Definition $t_{k+1} \geqslant t_k$, folgt aus (65) mit $t_{k+1} \geqslant t_k$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$(66)\quad \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} > 1$$

Aus (66) in Verbindung mit (62) ergibt sich, daß die optimale Intervallänge für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$ stetig abnimmt, je weiter man k abzählt.

Für degressive Verbrauchsfunktionen definieren wir $f(t) = \sqrt{t}$. Dann erhalten wir aus (62):

$$(67)\quad t_k - t_{k-1} = \frac{\sqrt{t_{k+1}} - \sqrt{t_k}}{\frac{1}{2\sqrt{t_k}}} = 2\sqrt{t_k}\left(\sqrt{t_{k+1}} - \sqrt{t_k}\right)$$

$$\frac{(t_k - t_{k-1})\left(\sqrt{t_{k+1}} + \sqrt{t_k}\right)}{2\sqrt{t_k}} = \left(\sqrt{t_{k+1}} - \sqrt{t_k}\right)\left(\sqrt{t_{k+1}} + \sqrt{t_k}\right)$$

$$\frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} = \frac{2\sqrt{t_k}}{\sqrt{t_{k+1}} + \sqrt{t_k}}$$

$$(68)\quad \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k - t_{k-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{t_{k+1}}}{\sqrt{t_k}}$$

Aus (68) mit $t_{k+1} \geqslant t_k$ folgt wiederum:

$$(69)\quad \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} < 1$$

Somit nimmt für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$ die Intervallänge ständig zu, je weiter man k abzählt. Für den Spezialfall linearer Verbrauchsfunktionen bleibt die optimale Intervallänge stets konstant:

$$f(t) = \alpha t$$

$$(70)\quad t_k - t_{k-1} = \frac{\alpha t_{k+1} - \alpha t_k}{\alpha} = t_{k+1} - t_k$$

Für die Entwicklung der Bestellmengen gilt dagegen folgende Beziehung: Aus (62) gewinnen wir

$$(71)\quad m(k+1) = (t_k - t_{k-1}) f'(t_k)$$

$$m(k+2) = (t_{k+1} - t_k) f'(t_{k+1})$$

usw.. Fassen wir (71) zu einer Relation zusammen, so erhalten wir

$$(72)\quad \frac{m(k+1)}{m(k+2)} = \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} \cdot \frac{f'(t_k)}{f'(t_{k+1})}$$

Definieren wir wiederum f(t) mit $f(t) = \alpha t^2$, so erhalten wir aus (65):

$$(65)\quad \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} = \frac{t_{k+1} + t_k}{2t_k}$$

Die rechte Seite von (72) wird dann zu

$$(73)\quad \frac{m(k+1)}{m(k+2)} = \frac{t_{k+1} + t_k}{2t_k} \cdot \frac{2t_k}{2t_{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t_k}{t_{k+1}}$$

Aus der Eigenschaft monotonen Steigens erhalten wir wiederum für alle $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$(74)\quad \frac{m(k+1)}{m(k+2)} < 1$$

Für degressive Verbrauchsfunktionen gilt entsprechend das Gegenteil.

Aus (60) ist ferner abzulesen, daß die optimale Länge eines beliebigen Intervalls k bei progressiven (degressiven) Funktionen umso kleiner (größer) ausfällt, je stärker (schwächer) die Funktion im Punkt t_k gekrümmt ist. Ceteris paribus wird die optimale Intervallänge bei progressiven (degressiven) Funktionen mit einem Exponenten von 1,5 (1/1,5) größer (kleiner) sein als bei einem Exponenten von 2 (1/2). Entsprechendes gilt für die optimalen Bestellmengen.

Gleichung (60) sagt zusammen mit (72), daß sich bei progressiven (degressiven) Funktionen ständig absolut größere (kleinere) Bestellmengen absolut kleiner (größer) werdenden Intervallen gegenüberstehen. Die Veränderung von Intervall zu Intervall bzw. von Bestellmenge zu Bestellmenge wird folglich immer kleiner, je weiter k abgezählt wird.

4. Ableitung der optimalen Bestellhäufigkeit bei gleichzeitiger Realisierung der optimalen Aufteilungsweise

Fassen wir das bisherige Ergebnis zusammen, so ist zu sagen, daß mit der Rekursionsformel eine Teillösung vorliegt, die es gestattet, entweder bei gegebener Bestellhäufigkeit die optimale Aufteilungsweise oder aber bei gegebener Aufteilungsweise (d.h. bei Bekanntsein eines einzigen Intervalls) die optimale Bestellhäufigkeit zu bestimmen. Diese Partiallösung ist allgemein insofern, als sie für jede der zugelassenen Verbrauchsfunktionen gilt, aber sie gestattet es nicht, das Optimum der Bestellweise zu definieren, was ja eine simultane Fixierung sowohl der Bestellhäufigkeit als auch der Aufteilungsweise verlangt. Es soll im folgenden versucht werden, den Weg einer Simultanbestimmung beider Parameter anzugeben.

Wir gehen von der optimalen Relation zwischen den einzelnen Intervallen bzw. Bestellzeitpunkten aus, die mit Hilfe der Rekursionsformel abgeleitet wurden[6] und die wir allgemein a_i; (i = 1, 2, ..., n-1); nennen wollen. Für $a_1 = t_1/t_2$ finden wir z.B. bei $f(t) = \alpha t^2$:

$$t_1 - t_o = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{f'(t_1)} = \frac{\alpha t_2^2 - \alpha t_1^2}{2\alpha t_1}$$

wobei gilt: $t_o = 0$

$$2t_1^2 + t_1^2 = t_2^2$$

$$t_1 = a_1 t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} t_2$$

$$a_1 = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Durch weitere Benutzung der Rekursionsformel (60) finden wir $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Allgemein ergibt sich für $f(t) = \alpha t^2$ für a_i folgende Beziehung:

---

6) Vgl. S. 47 ff. dieses Kapitels, insbesondere Gleichung (60), S. 50

(75) $t_i = a_i t_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3-2a_{i-1}}}\, t_{i+1}$

(76) $a_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3-2a_i}}$

Das allgemeine Bildungsgesetz der a_i für beliebige Potenzfunktionen $f(t) = \alpha t^r$ lautet:

(77) $t_i - t_{i-1} = \frac{f(t_{i+1})-f(t_i)}{f'(t_i)} = \frac{t_{i+1}^r - t_i^r}{r t_i^{r-1}}$

$$(r+1)t_i^r - r t_{i-1} t_i^{r-1} = t_{i+1}^r$$

Es wird eine Substitution vorgenommen:

$$t_{i-1} = a_{i-1} t_i$$

$$(r+1)t_i^r - a_{i-1} r t_i^r = t_{i+1}^r$$

$$t_i = \frac{1}{\sqrt[r]{r+1-ra_{i-1}}}\, t_{i+1}$$

(78) $a_i = \frac{1}{\sqrt[r]{r+1-ra_{i-1}}}$

Oder auch:

(79) $a_{i+1} = \frac{1}{\sqrt[r]{r+1-ra_i}}$

Die folgende Betrachtung gilt nur für die Funktion $f(t) = \alpha t^2$; sie läßt sich jedoch gemäß (77), (79) unschwer auf jede Funktion vom Typ $f(t) = \alpha t^r$ erweitern.

Wir nehmen eine weitere Substitution vor:

(80) $a_i = f(i)$

Dabei wird i, obwohl von Entwicklung und Ableitung her ganzzahlig, vorerst als kontinuierlich variabel, d.h. alle reellen Zahlen durchlaufend, angesehen.

Nach (76) ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für f(i):

(81) $f(i+1) = \frac{1}{\sqrt{3-2f(i)}}$

$$f^2(i+1)\left\{3-2f(i)\right\} = 1$$

Durch Differenzieren gewinnen wir für f(i) folgenden Ansatz:

(82) $6f'(i+1)f(i+1)-4f(i+1)f'(i+1)f(i)-2f^2(i+1)f'(i) = 0$

$3f'(i+1)2f'(i+1)f(i)-f(i+1)f'(i) = 0$

(83) $\frac{f'(i+1)}{f(i+1)} = \frac{f'(i)}{3-2f(i)}$

Wenn es gelingt, die in (83) beschriebene Differentialgleichung - oder, wenn man für i nur die Reihe der natürlichen Zahlen zuläßt, die Differenzengleichung (81) - zu lösen, steht einer simultanen Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit und der optimalen Aufteilungsweise nichts mehr im Wege. (83) beschreibt nämlich das Bildungsgesetz der optimalen Relationen der t_k untereinander, und zwar in Abhängigkeit von i, d.h. in Abhängigkeit von der Bestellhäufigkeit n. Wird die Bestellhäufigkeit um z.B. 1 erhöht, so verändern alle t_k ihren Wert um einen bestimmten Betrag, nämlich um das a_i-fache, während ihre Relation untereinander ungeändert bleibt. Es ist leicht einzusehen, daß z.B.

$$t_1 = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} T$$

ist. Bei einer Erhöhung der Bestellanzahl um 1 verkürzt sich der Koordinatenwert von t_1 um das a_i-fache:

$$t_1 = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} a_i T; \quad (a_i < 1)$$

Daraus folgt, daß auch die schraffierten Flächen in Abb. 6 sich um das a_i^2-fache verändern, wenn die Bestellhäufigkeit sich von z.B. i auf i+1 erhöht. Somit besteht über (83) ein Funktionalzusammenhang zwischen Bestellhäufigkeit und Höhe der Kapitalbindung (bzw. der Zinskosten) bei gleichzeitiger optimaler Aufteilungsweise.

Mit herkömmlichen mathematischen Mitteln gelingt es leider nicht, (83) explizit zu lösen. Im folgenden soll eine Näherungslösung für (83) angegeben werden, um die Struktur der optimalen Bestellweise bei fixierter Planungsperiode sichtbar zu machen.

Wir setzen näherungsweise

(84) $\frac{f'(i)}{f(i)} = \frac{f'(i-1)}{f(i-1)} \cdot \frac{f(i-1)}{3-2f(i-1)} \approx \frac{B}{A^i}$

Daraus folgt, daß

$$\frac{f'(i)}{f(i)} \approx B.A^{-i}$$

ist. Durch Integrieren gewinnen wir

$$\int_1^n \frac{df(n)}{f(n)} = \int_1^n \frac{B}{A^n}\,dn = B \cdot \int_1^n \frac{dn}{e^{n.\ln(A)}}$$

$$\ln\left\{\frac{f(n)}{f(1)}\right\} = -\frac{B}{\ln(A)} \cdot e^{-n.\ln(A)} \Bigg|_1^n$$

$$f(n) = -f(1).e^{\left[\frac{B}{\ln(A)} \cdot e^{-n.\ln(A)}\right]_1^n}$$

$$f(n) = -f(1).e^{\left[\frac{B}{\ln(A)} \cdot e^{-n.\ln(A)} - \frac{B}{\ln(A)} \cdot e^{-1.\ln(A)}\right]}$$

Wir vereinfachen durch die Substitutionen:

(84b) $\frac{B}{\ln(A)} = D$

(84c) $e^{-\left[\frac{B}{\ln(A)} \cdot e^{-\ln(A)}\right]} = E$

und setzen in (84a) ein:

(84d) $f(n) = -f(1) \cdot E \cdot e^{De^{-n.\ln(A)}}$

Unter Benutzung von (80) finden wir bei gleichzeitiger Umformung:

(84e) $-\frac{1}{D} \cdot \ln\frac{a_n}{a_1 \cdot E} = e^{-n.\ln(A)}$

$$-\ln\left\{\frac{1}{D} \cdot \ln\frac{a_n}{a_1 \cdot E}\right\} = -n \cdot \ln(A)$$

(85) $$n = \frac{\ln(\frac{1}{D}\ln\frac{a_n}{a_1 \cdot E})}{\ln(A)}$$

In (85) sind A, D und E sowie a_1 und a_n Parameter, die für jedes f(t) neu zu bestimmen sind. Wenn nun noch die bestellfixen Kosten n.S berücksichtigt werden, läßt sich die optimale Bestellweise in Abhängigkeit von der Bestellhäufigkeit bei gleichzeitiger optimaler Aufteilungsweise beschreiben.

Zur Beurteilung von (85) ist folgendes zu sagen: Abgesehen von den rein analytischen Schwierigkeiten bei der Lösung der Differentialgleichung (83) ist die Tatsache wenig befriedigend, daß der Rechengang, ausgehend von (79),

für jede spezielle Funktion gesondert durchzuführen ist. Von einer allgemeinen Lösung des Problems der optimalen Bestellweise kann daher nicht gesprochen werden.

Die Möglichkeit, aus (83) bzw. (85) weitergehende Aussagen hinsichtlich der optimalen Bestellweise zu gewinnen, sind recht beschränkt. (83) bzw. (85) vermochten vor allem nicht der zu fordernden Ganzzahligkeit der Bestellhäufigkeit zu entsprechen. Ist die Gesamtmenge $f(t_n)$ irgendeine reelle Zahl und wird $f(t_n)$ vorgegeben, so wird diese Menge $f(t_n)$ im allgemeinen nicht in einer ganzzahligen Anzahl von Schritten optimal zu bestellen sein. Liegt aber die für ein bestimmtes $f(t_n)$ ermittelte optimale Bestellhäufigkeit zwischen zwei natürlichen Zahlen, so kann das unmöglich optimal sein, denn bei gleichen aufzuwendenden bestellfixen Kosten könnte eine größere als die vorgegebene Menge bestellt werden.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse

Das Problem der optimalen Bestellweise bestand darin, sowohl für die Bestellhäufigkeit wie für die Aufteilungsweise gleichzeitig optimale Werte zu finden. Bei der Lösung gingen wir so vor, daß zunächst die optimale Aufteilungsweise für jede Bestellhäufigkeit ermittelt wurde, um sodann die Aufteilungsweise als Funktion der Bestellhäufigkeit beschreiben zu können.

Im einzelnen konnten hinsichtlich der optimalen Aufteilungsweise folgende Ergebnisse gewonnen werden:

(1) Die optimale Aufteilung einer gegebenen Jahresbedarfsmenge auf Bestellmengen bzw. einer Planungsperiode auf Bestellintervalle hängt grundsätzlich von der Entwicklung des Änderungsvermögens der Zinskostenfunktion und damit von der Entwicklung des Änderungsvermögens der Materialverbrauchsfunktion ab.

(2) Bei linearer Verbrauchsfunktion ist das partielle Änderungsvermögen der Zinskostenkurve an jeder Stelle der Verbrauchsfunktion gleich groß, da die erste Ableitung einer linearen Funktion eine Konstante ist.

Mithin müssen alle Bestellmengen einerseits und alle Bestellintervalle andererseits untereinander gleich groß sein, wenn die optimale Aufteilungspolitik realisiert ist.

(3) Bei nichtlinearen Verbrauchsfunktionen hängt der optimale Aufteilungsmodus ebenfalls von der Entwicklung des partiellen Änderungsvermögens der Zinskostenfunktion und damit von der Entwicklung des Änderungsvermögens der zugrundeliegenden Materialverbrauchsfunktion ab. Und zwar ist bei progressiven Verbrauchsfunktionen eine ständige Abnahme, bei degressiven Funktionen eine ständige Zunahme der optimalen Länge der Bestellintervalle im Zeitablauf zu erwarten. Hinsichtlich der optimalen Größe des Bestellumfangs gilt die entgegengesetzte Aussage. Der Effekt ist umso stärker, je stärker die Verbrauchsfunktion gekrümmt ist.

Die absolute Zunahme (Abnahme) der Bestellintervalle (Bestellmengen) wird mit zunehmender Ordnungszahl der Bestellungen bei ein und derselben Bestellhäufigkeit immer kleiner. Ist die optimale Zahl der Bestellungen sehr hoch, so nähern sich die Relationen zwischen zwei benachbarten Bestellintervallen bzw. zwei benachbarten Bestellmengen bei den zuletzt ausgeführten Bestellungen asymptotisch dem Grenzwert 1.

(4) Eine innerhalb des Planungszeitraums regelmäßig schwankende Verbrauchsfunktion, bei der der Verbrauch je Zeiteinheit zunächst abnimmt, um nach einem Wendepunkt wieder zuzunehmen, wird sich in ihrer ersten Hälfte wie eine degressive, in der zweiten Hälfte wie eine progressive Verbrauchsfunktion verhalten. Das bedeutet, daß die optimalen Bestellintervalle zunächst sehr klein sind, bis zum Wendepunkt laufend zunehmen, um dann wieder stetig abzunehmen. Hinsichtlich der optimalen Größe der Bestellumfänge gilt, daß diese zunächst groß sind, bis zum Wendepunkt laufend abnehmen, um dann wieder zuzunehmen.

Die abgeleiteten Beziehungen gelten für alle Bestellhäufigkeiten und werden weder durch die Länge der Planungsperiode noch durch die Höhe des Zinsfußes oder die Höhe der bestellfixen Kosten beeinflußt.

Die vollständige Lösung des Problems der optimalen Bestellweise ließ sich durch ein System von Differentialgleichungen beschreiben, indem jeder Verbrauchsfunktion eine spezifische Differentialgleichung zugeordnet wurde. Für $f(t) = \alpha t^2$ wurde eine Lösung angegeben. Insgesamt erwies sich dieser Lösungsweg aus analytischen Gründen jedoch als wenig ergiebig und befriedigend, so daß nunmehr ein anderes Verfahren angewandt werden soll.

IV. Die optimale Bestellweise unter Ganzzahligkeitsbedingungen

1. Beschreibung des Ansatzes

Aus dem vorhergehenden Abschnitt III ergab sich, daß die a_i, also die optimalen Relationen zwischen den einzelnen Intervallen bzw. Bestellzeitpunkten, unabhängig von der Größe der vorgegebenen Gesamtmenge bestimmt werden konnten. Daraus folgt, daß die a_i und damit die durch die Aufteilungsweise beeinflußbaren Kosten bei einer Variation der Gesamtmenge unberührt bleiben. Dagegen werden durch eine Variation der Bestellhäufigkeit sowohl die Zinskosten wie die bestellfixen Kosten betroffen.

Würden wir nun die Anzahl der Bestellungen konstant halten, aber die gesamte zu beziehende Menge verändern, wodurch die durch die Aufteilungsweise betroffenen Kosten ja unverändert blieben, dann muß bei einer endlichen Gesamtmenge ein Minimum der Beschaffungskosten pro Stück existieren, denn mit jeder Ausdehnung der Gesamtmenge - bei zuvor als optimal ermittelter und konstant gehaltener Aufteilung - sinken die bestellfixen Kosten und steigen die Zinskosten pro Stück.

Wir wollen nun so vorgehen, daß wir nicht nur $M \equiv f(t_n)$, sondern auch die (gegebenenfalls aus der allgemeinen Lö-

sung ermittelte) auf einen ganzzahligen Wert aufgerundete Anzahl der Bestellschritte vorgeben, die Gesamtmenge $f(t_n)$ dafür in kleinen Grenzen so verändern, bis $f(t_n)$ in den vorgegebenen ganzzahligen Bestellschritten mit minimalen Kosten beschafft werden kann. t_n wird also wie alle übrigen t_k - in engen Grenzen - als Variable behandelt. Dadurch gelingt es, die mit der Aufteilungsweise und die mit der Bestellhäufigkeit verbundenen Kosten gleichzeitig zu minimieren und außerdem die Ganzzahligkeit des Problems zu beachten.

Dem Untersuchungsmodell liegen folgende weitere Annahmen zugrunde:

(1) Der Unternehmer verfügt über einen hinreichend großen ökonomischen Horizont, um für eine beträchtliche Zeitspanne die zeitliche Entwicklung des Materialverbrauchs genau prognostizieren zu können.

(2) Die variablen Kosten pro Stück (Einstandspreis und dgl.) sind im Zeitablauf konstant.

(3) Die bestellfixen Kapitalbeträge werden - entsprechend der eingangs gemachten Vereinfachung - bei der Ermittlung der Zinskosten unberücksichtigt gelassen.

2. Die Bestimmung des ganzzahligen Optimums

Wir nehmen wiederum Gleichung (43) zum Ausgangspunkt der Überlegungen:

$$(43)\quad F = \frac{\sum_{k=1}^{n} ic\left\{f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Dabei sollen die t_k, wie bisher, so numeriert sein, daß $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist. Damit ist F ebenfalls wieder als Funktion der n Veränderlichen t_k bestimmt:

$$(86)\quad F = F(\mathfrak{t}) = F(t_1, \ldots, t_n)$$

wobei diesmal a l l e t_k, also auch t_n, innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ frei wählbar sind. Soll die Funktion $F(\mathfrak{t})$ in einem Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ einen Extremwert aufweisen,

so muß wiederum gelten:

$$(87)\quad 0 = \delta F = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{t_0} \cdot \delta t_k$$

Aus (87) folgt, daß im Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ alle $\partial F/\partial t_k$ gleich Null sein müssen.

Für die ersten n-1 $\partial F/\partial t_k$ gilt dann:

$$(88)\quad \frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{ic}{f(t_n)}\Big\{f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+f(t_k)-f(t_{k+1})-f(t_k) + f(t_k)\Big\} = 0$$

$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Da der Faktor $ic/f(t_n)$ nicht gleich Null werden kann, vereinfacht sich (88) zu:

$$(89)\quad f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+f(t_k)-f(t_{k+1}) = 0$$

$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Gleichung (89) ist unsere schon bekannte Rekursionsformel (vgl. (58) bzw. (60)), die es gestattet, die optimale Relation der einzelnen Intervalle untereinander zu bestimmen. Um nun die absolute Größe jedes Intervalls zu finden, legen wir das bis dahin variable t_n fest:

$$(90)\quad \frac{\partial F}{\partial t_n} = \frac{ic}{f^2(t_n)}\Big\{f(t_n)f'(t_n)(t_n-t_{n-1})+f(t_n)f(t_n)-f(t_n)\cdot f(t_n)\Big\} - \frac{ic}{f^2(t_n)}\Big\{f'(t_n)\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k-t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt + nS\Big\} = 0$$

Durch Vereinfachung erhalten wir:

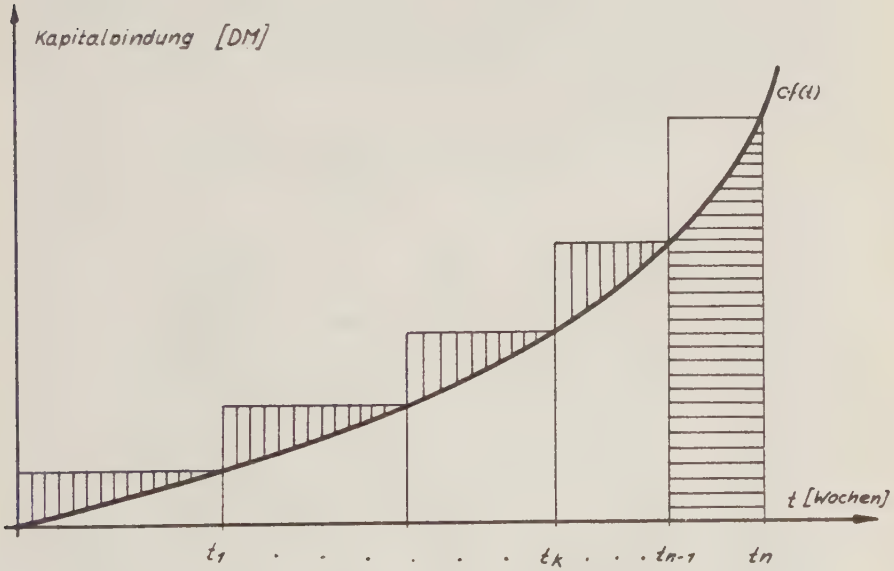
$$ic.f(t_n)(t_n-t_{n-1})-ic\left\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k-t_{k-1})-\int_{o}^{tn} f(t)dt\right\} - nS = 0$$

Wir können nun das erste Glied noch zum Summenausdruck addieren und erhalten als endgültige Bedingung für t_n:

$$(91)\quad ic\left\{\int_{o}^{tn} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})\right\} - nS = 0$$

Gleichung (91 besagt, daß die kumulierten bestellfixen Kosten gerade den Zinskosten des kumulierten Verbrauchs abzüglich der ersten n-1 Rechtecke $f(t_k)(t_k-t_{k-1})$ sein müssen, wenn alle Intervalle und die Planungsperiode selbst ihre optimale Länge haben sollen. Abb. 9 veranschaulicht diese Bedingung. Im Optimum sind die gesamten bestellfixen Kosten proportional der Differenz der Summe der horizontal gestreiften und vertikal gestreiften Flächen:

Abb. 9: Verhältnis von Zinskosten und bestellfixen Kosten im Optimum



Wie aus (91) und insbesondere Abb. 9 zu entnehmen ist, vergrößern steigende Bestellhäufigkeiten die zu beschaffende Gesamtmenge, fallende verringern sie. Eine Änderung der Höhe der bestellfixen Kosten hat die gleiche Wirkung, eine Änderung des Zinsfußes die entgegengesetzte. Die optimale Aufteilungsweise bleibt davon unberührt.

(91) läßt sich geometrisch noch klarer interpretieren, wenn wir (91) in die Ursprungsgleichung (43) einsetzen:

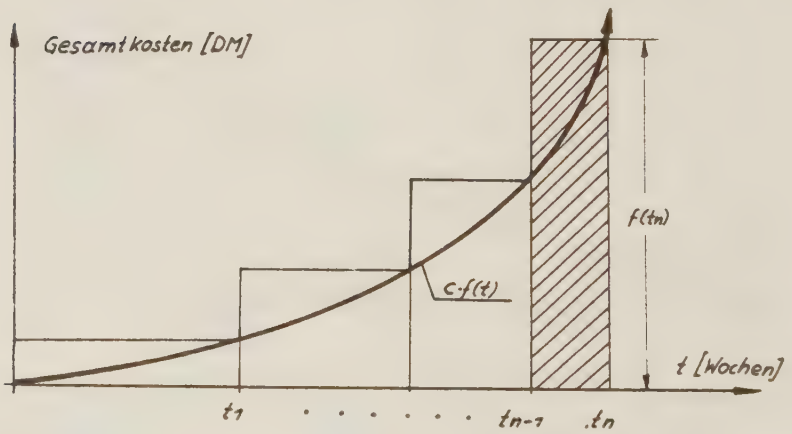
$$(92)\quad F = \frac{ic\left\{f(t_n)(t_n - t_{n-1})\right\}}{f(t_n)} = ic(t_n - t_{n-1})$$

Gleichung (92) besagt, daß sich die von der Bestellweise abhängigen Stückkosten im Optimum proportional dem letzten Bestellintervall verhalten. Den gleichen Sachverhalt treffen wir bei den beeinflußbaren Gesamtkosten der Planungsperiode an:

$$(93)\quad F.f(t_n) = f(t_n)(t_n - t_{n-1}).ic$$

Gleichung (93) beweist, daß die Zinskosten plus den gesamten bestellfixen Kosten der Planungsperiode im Optimum der Bestellweise gerade proportional dem Rechteck $f(t_n)(t_n - t_{n-1})$ sind. Diese Aussage läßt sich durch die nachfolgende Skizze verdeutlichen:

Abb. 10: Gesamtkosten der Beschaffung im Optimum der Bestellweise



Die gesamten Kosten der Beschaffung einschließlich der pro Stück konstanten Einstandskosten werden im Optimum durch folgende Beziehung repräsentiert:

$$(94)\quad K = c.f(t_n) + ic.f(t_n)(t_n - t_{n-1})$$

$$K = c.f(t_n)\left\{1 + i(t_n - t_{n-1})\right\}$$

Durch die in (89) und (91) beschriebenen Optimumbedingungen sind alle t_k eindeutig determiniert, vor allem auch t_n

und somit $M(n) \equiv f(t_n)$, d.h. die insgesamt in einem Planungszeitraum T zu beschaffende Menge. (89) gestattet die Berechnung der optimalen Relation der Intervalle bzw. der Bestellmengen untereinander, während (91) die optimal zu beziehende Gesamtmenge und damit die Länge der Planungsperiode determiniert, so daß alle Intervalle rückwärts über (89) in ihrer optimalen Länge definiert sind.

Zu jeder Bestellhäufigkeit n existiert also ein und nur ein $M(n) \equiv f(t_n)$, das in diesen n Schritten optimal bestellt werden kann. Die (topologische) Menge der in einer ganzzahligen Anzahl von Bestellschritten insgesamt zu bestellende Stückzahl $f(t_n)$ ist äquivalent der Menge der natürlichen Zahlen, aber bei weitem nicht gleich der Menge der reellen Zahlen. Zwischen zwei Werten $f(t_n)$ und $f(t_{n+1})$ liegen also noch M(n), die nicht in einer ganzzahligen Anzahl von Bestellschritten beschafft werden können, die also auch nicht die Bedingungen (89) und (91) erfüllen. Das bedeutet im einzelnen, daß einer gegebenen Bestellhäufigkeit n gerade eine solche Gesamtmenge $f(t_n)$ zuzuordnen ist, bei der (89) und (91) zugleich erfüllt sind. Es existiert also für alternative n ein Katalog zugehöriger optimaler Gesamtmengen $f(t_n)$ bzw. zugehöriger optimaler Planungsperioden.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Während für jede beliebige Gesamtmenge $f(t_n)$ bzw. für jede beliebige Planungsperiode die zugehörige optimale Aufteilungsweise entwickelt werden kann (vgl. Abschnitt III dieses Kapitels), ist die (topologische) Menge aller optimalen $f(t_n)$ bzw. aller optimalen Längen von Planungsperioden aus Gründen der Ganzzahligkeit auf die (topologische) Menge der natürlichen Zahlen beschränkt.

3. Exkurs: Ableitung der Bestellmengenformel[7] aus der allgemeinen Lösung

Eine allgemeine Lösung des Bestellmengenproblems muß in der Lage sein, für den speziellen Fall einer linearen

7) Vgl. Fußnote 13) der Einleitung

Verbrauchsfunktion die gleichen Ergebnisse zu liefern, die die Literatur in Gestalt der "Bestellmengenformel"[8] bietet.

Wir definieren $f(t) = \alpha t$. Dann ergibt Beziehung (89):

(95) $\alpha(t_k - t_{k-1}) + \alpha t_k - \alpha t_{k+1} = 0$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$

Da α wegen des monotonen Steigens von $f(t)$ ungleich Null angenommen werden muß, gilt:

(96) $t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$

d.h. die Bestellintervalle bleiben konstant. Es kann also offensichtlich $t_k = vk$ gesetzt werden, wobei v gerade gleich der konstanten Intervallänge ist. Für Optimumbedingung (91) erhalten wir unter Benutzung der Substitution $t_k = vk$; $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$(97)\quad ic\left\{\alpha\int_0^{nv} t.dt - \alpha\sum_{k=1}^{n-1} vk(vk - v(k-1))\right\} - nS = 0$$

$$ic\alpha\left\{\int_0^{nv} t.dt - v^2.\sum_{k=1}^{n-1} k(k-(k-1))\right\} - nS = 0$$

$$ic\alpha\left\{\frac{v^2n^2}{2} - v^2.\frac{n}{2}(n-1)\right\} - nS = 0$$

$$(98)\quad \frac{ic\alpha v^2}{2} \cdot n - nS = 0$$

Da n wegen der Struktur des Problems immer ungleich Null sein muß, ergibt sich die aus der Literatur her bekannte Tatsache, daß die optimale Intervallänge bei linearen Verbrauchsfunktionen unabhängig von der Anzahl der Bestellungen ist:

$$(99)\quad v = \sqrt{\frac{2S}{ic\alpha}}$$

Das optimale Intervall v ist bei linearen Verbrauchsfunktionen also gleich der Wurzel aus dem Zweifachen der bestellfixen Kosten pro Intervall, dividiert durch Zinsfuß, Einstandspreis pro Stück und Steigungsmaß der Verbrauchsfunktion.

---

8) Vgl. Fußnote 13) der Einleitung

Wir können die in der Literatur gebräuchliche Bestellmengenformel

$$(100)\quad x = \sqrt{\frac{2MS}{ic}}$$

leicht in die Formel (99) überführen, wenn wir berücksichtigen, daß bei linearen f(t): $M = \alpha t_n = \alpha T$ ist, wobei in der Literatur übereinstimmend $T = 1$ gesetzt ist[9]; (100) wandelt sich also zu

$$(101)\quad x = \sqrt{\frac{2\alpha S}{ic}}$$

Nun ist $x = M/n = \alpha T/n = v$. Wir finden aus (101):

$$(102)\quad v = \sqrt{\frac{2\alpha S}{ic\alpha^2}} = \sqrt{\frac{2S}{ic\alpha}}$$

womit die Identität der Bestellmengenformel mit dem unter den speziellen Prämissen des linearen Verbrauchs abgeleiteten Ergebnisses aus den allgemeinen Optimumbedingungen (89) und (91) bewiesen ist.

4. Der Nachweis eines Minimums

Wir haben festgestellt, daß die Optimumbedingungen (89) und (91) einen Extremwert der Gleichung (43) darstellen. Es soll nun bewiesen werden, daß es sich bei diesem Extremwert um ein Minimum handelt. Dabei wollen wir so vorgehen, daß zunächst allgemein die Existenz eines Minimums für den Lösungsansatz (43) nachgewiesen wird. Sodann soll dargelegt werden, daß der im Punkt $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ abgeleitete Extremwert tatsächlich ein Minimum ist.

Wir gehen vom Lösungsansatz in Gleichung (43) aus:

$$(43)\quad F = \frac{ic.\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - ic.\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt + nS}{f(t_n)}$$

Nun lassen wir t_n einmal gegen Null und einmal gegen Unendlich laufen:

1. Für $t_n \longrightarrow 0$ ergibt sich:

9) Vgl. die unter Fußnote 13) der Einleitung aufgeführten Autoren

$$(103)\quad \lim_{t_n \to 0}\left\{\frac{ic.\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_{k-1})}{f(t_n)} - \frac{ic.\int_0^{t_n} f(t)dt}{f(t_n)} + \frac{nS}{f(t_n)}\right\}$$

Der erste Ausdruck hat einen Grenzwert von Null, weil der Zähler wegen der höheren Potenz schneller gegen Null läuft als der Nenner. Beim zweiten Ausdruck finden wir die gleiche Situation vor. Der dritte Ausdruck wird unendlich groß, weil der Nenner bei konstantem Zähler gegen Null geht. Somit ist

$$(104)\quad \lim_{t_n \to 0} F = \infty$$

2. Für $t_n \longrightarrow \infty$ ergibt sich:

$$(105)\quad \lim_{t_n \to \infty}\left\{\frac{ic.\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - ic.\int_0^{t_n} f(t)dt}{f(t_n)}\right\} + \lim_{t_n \to \infty}\left\{\frac{nS}{f(t_n)}\right\}$$

Für den letzten Ausdruck ergibt sich, wie wir sofort sehen, der Grenzwert Null, wenn der Nenner bei konstantem Zähler gegen Unendlich läuft. Den ersten Ausdruck von (105) formen wir um:

$$(106)\quad \lim_{t_n \to \infty} \frac{\int_0^{t_n} f(t)dt}{f(t_n)} \cdot \lim_{t_n \to \infty}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1})}{\int_0^{t_n} f(t)dt} - 1\right\}$$

Nach einem Satz von l'Hopitàl bildet man den Limes eines Quotienten, indem man Zähler und Nenner einzeln differenziert und dann zur Grenzen übergeht:

$$(107)\quad \lim_{t_n \to \infty} \frac{\int_0^{t_n} f(t)dt}{f(t_n)} \cdot \lim_{t_n \to \infty} \frac{f'(t_n)(t_n - t_{n-1}) + f(t_n) - f(t_n)}{f(t_n)}$$

$$\lim_{t_n \to \infty} \frac{\int_0^{t_n} f(t)dt}{f(t_n)} \cdot \lim_{t_n \to \infty} \frac{f'(t_n)(t_n - t_{n-1})}{f(t_n)}$$

Der erste Ausdruck geht gegen Unendlich, weil der Zähler die höhere Potenz besitzt. Der zweite Ausdruck ist mit Sicherheit größer als Null, da wir nur Verbrauchsfunktionen zugelassen hatten, die monoton steigen, deren erste Ableitung also nie gleich oder kleiner Null werden kann. Folglich muß der Grenzwert des gesamten Ausdrucks

$$\lim_{t_n \to \infty} F = \infty \tag{108}$$

werden. Zusammenfassend können wir sagen: Die von der Bestellweise abhängigen Stückkosten F kommen für sehr kleine t_n aus dem Unendlichen (vgl. (104)) und gehen für sehr große t_n gemäß (108) wieder ins Unendliche. Bei sehr kleinen t_n ergeben sich also unendlich hohe bestellfixe Kosten, bei sehr großen t_n unendlich hohe Zinskosten. Dazwischen muß notwendigerweise ein Minimum der Stückkosten existieren. Die hier angestellte Betrachtung ist allgemein und gilt für jede zugelassene Verbrauchsfunktion ohne Einschränkung.

3. Es soll nun bewiesen werden, daß die Optimumbedingungen (89) und (91) tatsächlich ein Minimum charakterisieren. Der dabei erforderliche mathematische Aufwand rührt daher, daß der in (89) und (91) beschriebene Extremwert von n Variablen abhängt, also den tiefsten Punkt eines n-dimemsionalen Hyperraumes bildet.

Um zu entscheiden, ob das in den Punkten $(t_{o1}, t_{o2}, \ldots, t_{op})$; $t_{ok} = (t_{ok1}, \ldots, t_{okn})$; festgestellte Extremum ein Minimum oder Maximum ist, entwickeln wir aus $F(t_{ok})$ nach Taylor die hinreichenden Kriterien durch folgenden Ansatz[10]:

$$F(t_{ok}+\delta) - F(t_{ok}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\nabla\delta)^r F(t_{ok})}{r\,!} \tag{109}$$

worin

$$\frac{(\nabla\delta)^r F(t_{ok})}{r\,!} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} F(t_{ok})$$

10) Vgl. H. Behnke, Vorlesungen über Infinitesimalrechnung II, 10. veränd. Aufl., Münster 1963, S. 86 ff.

$|\mathfrak{H}| \neq 0$

mit $\mathfrak{H} = (h_1, \ldots, h_n)$ darstellt. $\mathfrak{H}$ ist ein beliebiger, geeignet kleiner Vektor aus dem Gebiet $\mathfrak{G}$, in dem $F(\mathfrak{t}) = F(t_1, \ldots, t_n)$ definiert ist.

Wir brechen die Taylorsche Reihe nach dem zweiten Glied ab, berücksichtigen gleichzeitig, daß $(\nabla\mathfrak{H})F(\mathfrak{t}_{ok})$ wegen $\partial F/\partial t_k = 0$ gleich Null zu sein hat, und finden als hinreichende Kriterien eines Minimums:

$$(110)\quad (\nabla\mathfrak{H})^2 F(\mathfrak{t}_{ok}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} h_i h_j \, F(\mathfrak{t}_{ok}) > 0$$

Ist dagegen

$$(111)\quad (\nabla\mathfrak{H})^2 F(\mathfrak{t}_{ok}) \geq 0$$

je nach Art von $\mathfrak{H} \in \mathfrak{G}$, so wird man spezielle Untersuchungen führen müssen, weil über den Charakter des Extremwertes nichts Genaues gesagt werden kann. Alle anderen Möglichkeiten von (109) scheiden für ein Minimum a priori aus. Die Untersuchung läßt sich folglich auf den Fall (110) reduzieren.

Die folgende Analyse beschränkt sich auf den Fall einer linearen Verbrauchsfunktion, um die Rechenarbeit klein zu halten. Wie man sich jedoch in (109) unschwer überzeugen kann, handelt es sich um ein für jede Funktion brauchbares Verfahren.

Es wird gefordert, daß

$$(112)\quad (\nabla\mathfrak{H})^2 F(\mathfrak{t}_{ok}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} F(\mathfrak{t}_{ok}) > 0$$

Setzt man $f(t) = at$, dann gilt gemäß (43):

$$(113)\quad F(\mathfrak{t}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a t_k (t_k - t_{k-1}) - a \cdot \int_0^{t_n} t.dt + nS}{a.t_n}$$

Wir beginnen mit $\partial^2/\partial t_i \partial t_j$:

$$(114)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} F(\mathfrak{t}_{ok}) = \frac{\partial}{\partial t_j}\left\{a(t_i - t_{i-1}) + at_i - at_{i+1}\right\}$$

$$(1 \leq i,j \leq n-1),$$

wobei $\partial/\partial t_i$ entsprechend der Rekursionsformel (89) gefunden wurde:

$$(115)\quad \frac{\partial}{\partial t_i} = a(t_i - t_{i-1}) - at_{i+1} + at_i = 0$$

Dann ist

$$(116)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} F(\varphi_{ok}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } j \neq i-1;\ i+1 \\ -a, & \text{wenn } j = i-1;\ i+1 \\ 2a, & \text{wenn } j = i \end{cases}$$

$$(1 \leqslant i,j \leqslant n-1)$$

Und weiter ist

$$(117)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_n} F(\varphi_{ok}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } j \neq n-1 \\ -a, & \text{wenn } j = n-1 \end{cases}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

Aus Bedingung (91) gewinnen wir:

$$(118)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_j}\left\{\frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\left[\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - nS\right]\right\}$$

$$(1 \leqslant j \leqslant n-1)$$

Für den Fall, daß j die Werte $1 \leqslant j \leqslant n-2$ annimmt, entsteht bei der Differentiation von (118) nach ∂t_j folgende Beziehung:

$$(119)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_j} F(\varphi_{ok}) = \frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\left\{-a(t_j - t_{j-1}) - at_j + at_{j+1}\right\}$$

$$(1 \leqslant j \leqslant n-2)$$

Aus (89) wissen wir, daß die rechte Seite von (119) gleich Null ist. Also ist auch $\partial^2/\partial t_n \partial t_j$ für alle $1 \leqslant j \leqslant n-2$ gleich Null.

Für $\partial^2/\partial t_n \partial t_{n-1}$ ergibt sich hingegen

$$(120)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_{n-1}} F(\varphi_{ok}) = \frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\left\{-a(t_{n-1} - t_{n-2}) - at_{n-1}\right\}$$

Aus (89) wissen wir wiederum, daß $-a(t_{n-1}-t_{n-2})-at_{n-1}+at_n = 0$ ist. Folglich gilt:

$$(121)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_{n-1}} F(\varphi_{ok}) = -\frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\, at_n = -\frac{1}{t_n}$$

Wir fassen nun (119) bis (121) zusammen:

$$(122)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_j} F(\varphi_{ok}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 1 \leqslant j \leqslant n-2 \\ -\frac{1}{t_n}, & \text{wenn } j = n-1 \end{cases}$$

$(1 \leqslant j \leqslant n-1)$

Als letztes ist noch $\partial^2/\partial t_n \partial t_n$ zu bestimmen:

$$(123)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_n} F(\varphi_{ok}) = \frac{\partial}{\partial t_n}\left\{\frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\left[\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\cdot (t_k - t_{k-1}) + nS\right]\right\}$$

$(i,j = n)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_n} F(\varphi_{ok}) = \frac{1}{f^4(t_n)}\left\{f^2(t_n)\left[f''(t_n)\left\{\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} at_k(t_k - t_{k-1}) - nS\right\} + f'(t_n)f(t_n)\right] - 2f(t_n)f'(t_n)f'(t_n)\cdot \left\{\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} at_k(t_k - t_{k-1}) - nS\right\}\right\}$$

Wir wissen aus Gleichung (91), daß der in den kleinen geschweiften Klammern stehende Ausdruck jeweils gleich Null ist. Somit ergibt sich für $\partial^2/\partial t_n \partial t_n$:

$$(124)\quad \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_n} F(\varphi_{ok}) = \frac{f'(t_n)f(t_n)f^2(t_n)}{f^4(t_n)} = \frac{1}{t_n}$$

Es sind nun alle für die Extremwertuntersuchung wichtigen Teilergebnisse verfügbar. $(\nabla \delta)^2 F(\varphi_{ok})$ läßt sich zum Zweck besserer Übersicht in folgendem Schema darstellen:

$$(125)\quad (\nabla \delta)^2 F(\varphi_{ok}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} F(\varphi_{ok}) =$$

$$\begin{pmatrix} h_1h_1F_{11} + h_1h_2F_{12} + \cdots & \cdots + h_1h_nF_{1n} \\ h_2h_1F_{21} + h_2h_2F_{22} + \cdots & \cdots + h_2h_nF_{2n} \\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots \\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots \\ h_nh_1F_{n1} + h_nh_2F_{n2} + \cdots & \cdots + h_nh_nF_{nn} \end{pmatrix}$$

Um die Entwicklung von $(\nabla\varphi)^2F(\xi_{ok})$ beurteilen zu können, genügt es, die Koeffizienten von $(\nabla\varphi)^2$, also die F_{ij}, zu betrachten, was zweckmäßigerweise in Determinantenform geschieht:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2_a & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 2a & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 2a & -a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{t_n} & \frac{1}{t_n} \end{vmatrix}$$

Die mathematische Theorie sagt nun, daß $F(\xi)$ dann und nur dann ein Minimum an den Stellen $\xi_{ok} = (t_{ok1}, \ldots, t_{okn})$ besitzt, wenn die quadratische Form $(\nabla\varphi)^2F(\xi_{ok})$ für alle geeignet kleinen Änderungen der t_i, t_j positiv definit ist, d.h. wenn

$$F_{11} > 0;\ \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} > 0;\ \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} > 0;$$

$$;> \cdots > 0;\ \begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix} > 0$$ [11)]

Die zu

$$(\nabla\varphi)^2F(\xi_{ok}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_ih_j.F_{ti,tj}(\xi_{ok})$$

gehörende Determinante ist Δ_n:

11) Vgl. R.G.D. Allen, Mathematik für Volks- und Betriebswirte, dt. v. E. Kosiol, Berlin 1956, S. 506 ff., insb. S. 518 f.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ -a & 2a & -a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a & 2a & -a & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -a & 2a & -a & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -a & 2a & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{t_n} & \frac{1}{t_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 \dots & 0 & 0 & -a & 2a & -a & 0 \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & -a & a & -a \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_n} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{t_n} \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -a & 2a & -a \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} = \frac{1}{t_n} a \cdot \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \dots = \frac{1}{t_n} a^{n-1} > 0$$

Für ein beliebiges ganzzahliges n ist also Δ_n

$$(126)\quad \Delta_n = \frac{1}{t_n} a^{n-1} > 0$$

Außerdem wird noch gefordert, daß alle Hauptminoranten größer Null sein müssen. Die Determinanten der Hauptminoranten sollen $\Delta_n^{*(K)}$ für $1 \leq K \leq n-1$ genannt werden. Dann gilt für $\Delta_n^{*(1)}$, d.h. für die Hauptminorante mit n-1 Spalten und Zeilen:

$$\Delta_n^{*(1)} = \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -a & 2a & -a \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -a & 2a \end{vmatrix} = 2a^1 \cdot \begin{vmatrix} 2a & -a & \dots & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -a & 2a & -a \\ 0 & \dots & 0 & -a & \frac{3}{2}a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n^{*(1)} = 3a^2 \cdot \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & -a & 2a & & -a \\ 0 & 0 & -a & & & \frac{4}{3}a \end{vmatrix} = 4a^3 \cdot \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 2a & -a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & -a & 2a & -a \\ & & & -a & \frac{5}{4}a \end{vmatrix}$$

$$(127)\quad \Delta_n^{*(1)} = 5a^4 \left| \quad \right| = \ldots = na^{n-1} > 0$$

Für $\Delta_n^{*(2)}$ gilt entsprechend

$$(128)\quad \Delta_n^{*(2)} = (n-1)a^{n-2} > 0$$

und allgemein für $\Delta_n^{*(K)}$, $1 \leqslant K \leqslant n-1$:

$$(129)\quad \Delta_n^{*(K)} = \big(n(K-1)\big)\, a^{n-K} > 0$$

Für K = n-1 ergibt sich, wie man sofort sieht, $\Delta_n^{*(n-1)}$ = 2a > 0. Daraus folgt unmittelbar, daß alle $\Delta_n^{*(K)} > 0$ sind für $1 \leqslant K \leqslant n-1$ und daß $\Delta_n = \frac{1}{t_n}\, a^{n-1} > 0$ für alle n. Somit ist erwiesen, daß

$$(\nabla g)^2 F(\mathfrak{A}_{ok}) > 0,$$

womit die Existenz eines Minimums im kleinen (relatives Minimum) zwingend für alle f(t) = at nachgewiesen ist. Entsprechend läßt sich mit allen Verbrauchsfunktionen nichtlinearer Art verfahren.

5. Die Freiheitsgrade der Optimumbedingungen

Zur besseren Übersicht mögen die Optimumbedingungen (89) und (91) noch einmal genannt werden:

$$(89)\quad \frac{\partial F}{\partial t_k} = f'(t_k)(t_k - t_{k-1}) + f(t_k) - f(t_{k+1}) = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

$$(91)\quad \frac{\partial F}{\partial t_n} = ic\left\{\int_0^{t_n} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k - t_{k-1})\right\} - nS = 0$$

Bedingung (89) repräsentiert ein System von n-1 Gleichungen mit n+1 Variablen, nämlich $(t_1, \ldots, t_n)$ und damit $f(t_n)$ und die Bestellhäufigkeit n.

Bedingung (91) enthält eine Gleichung mit den zusätzlichen Größen i, c und S.

Insgesamt ist also ein System von n Gleichungen mit n+4 Größen beschrieben. Das System besitzt demnach 4 Freiheitsgrade, d.h. 4 Größen müssen vorgegeben sein, um das Gleichungssystem eindeutig determinieren zu können. Als

abgeleitete Beziehung gilt noch

$$f(t_n)\ F = f(t_n)(t_n - t_{n-1}).ic,$$

wodurch entweder $t_n - t_{n-1}$ oder aber $f(t_n)$ durch die gesamten beeinflußbaren Beschaffungskosten ausgedrückt werden kann.

Da aber normalerweise die Größen i, c und S verfügbar sind, reduziert sich das System auf n Gleichungen mit n+1 Unbekannten. Das System besitzt somit einen echten Freiheitsgrad, d.h. von den t_k muß eines gegeben sein oder aber es muß n gegeben sein. Wir haben somit die Wahl, entweder $f(t_n)$ und damit alle t_k bei gegebener Bestellhäufigkeit n oder aber n bei gegebenem $f(t_n)$ bzw. bei einem gegebenen Intervall (vgl. Abschnitt III dieses Kapitels) zu bestimmen.

6. Das Verhältnis von Zinskosten zu bestellfixen Kosten im Optimum

Es wird der Einfachheit halber wieder der Fall unterstellt, daß die bestellfixen Kosten nicht zinswirksam sein mögen. Dann beträgt - vgl. (42) - die Summe aller Zinskosten:

$$(134)\quad Z = ic\left\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_0^{t_n} f(t)dt\right\}$$

Die Summe aller bestellfixen Kosten, nämlich nS, ist im Optimum von (91):

$$(135)\quad nS = ic\left\{\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k - t_{k-1})\right\}.$$

Es soll das Verhältnis beider untersucht werden:

$$(136)\quad \vartheta = \frac{Z}{nS} = \frac{ic\left\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_0^{t_n} f(t)dt\right\}}{ic\left\{\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k - t_{k-1})\right\}}$$

Nach geringfügiger Umformung erhalten wir für :

$$\nu = \frac{f(t_n)(t_n-t_{n-1})+\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})-\int_0^{t_n} f(t)dt}{\int_0^{t_n} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})}$$

$$(137)\quad \nu = -1 + \frac{f(t_n)(t_n-t_{n-1})}{\int_0^{t_n} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})}$$

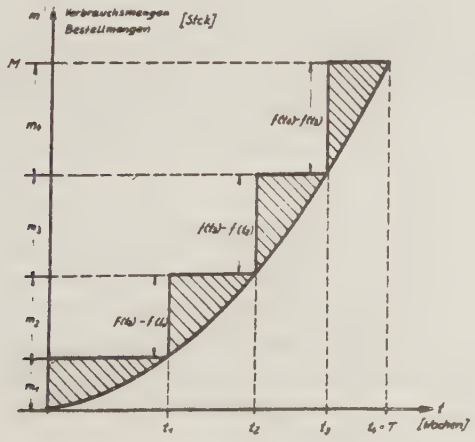
Wir betrachten den Ausdruck $f(t_n)(t_n-t_{n-1})$ und setzen eine weitere einschränkende Bedingung, indem wir nur Potenzfunktionen als Verbrauchsfunktionen zulassen. Das hat den Vorteil, daß wir ein konstantes Verhältnis zwischen dem Integral oberhalb und dem Integral unterhalb einer Funktion (vgl. Beziehung (46)) annehmen dürfen:

$$(138)\quad f(t_n)t_n = (r+1).\int_0^{t_n} f(t)dt$$

Die Größe $f(t_n)t_{n-1}$ läßt sich zerlegen, indem wir gemäß Abb. 11 zunächst die vertikalen Streifen $f(t_k)(t_k-t_{k-1})$ und dann die horizontalen Streifen $\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\}t_k$ von k=1 bis K=n-1 addieren:

$$(139)\quad f(t_n)t_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\}.t_k$$

Abb. 11: Zerlegung von $f(t_n)t_{n-1}$



Der zweite Summenausdruck von (139) hat noch eine interessante Eigenschaft. Wenn nämlich die Summe der vertikalen Streifen $f(t_k)(t_k-t_{k-1})$ ein Minimum annimmt, dann muß die Summe der horizontalen Streifen gleichzeitig maximal werden, weil die Gesamtfläche $f(t_n)t_{n-1}$ konstant ist. Für beide Summenausdrücke gilt im Optimum also die Beziehung (89). Aus (89) gewinnen wir:

$$(140)\quad f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(t_k)(t_k-t_{k-1})$$

und setzen ein:

$$(141)\quad f(t_n)t_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} f'(t_k)t_k(t_k-t_{k-1})$$

Da es sich bei den betrachteten Verbrauchsfunktionen um Potenzfunktionen handelt, können wir (141) vereinfachen:

$$(142)\quad f(t_n)t_{n-1} = (r+1).\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})$$

Wir setzen die Teilergebnisse (138) und (142) in Gleichung (137) ein und erhalten:

$$(143)\quad \vartheta = -1 + \frac{(r+1).\int_0^{t_n} f(t)dt - (r+1)\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})}{\int_0^{t_n} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})}$$

$$\vartheta = -1 + r+1 = r$$
$$(0 < r < \infty)$$

Das Ergebnis von (143) besagt, daß sich bei Potenzfunktionen vom Typ $f(t) = \alpha t^r$ im Optimum stets ein konstantes Verhältnis zwischen den gesamten Zinskosten und den gesamten bestellfixen Kosten herausbildet. Dieses Verhältnis ist gleich dem Exponenten der zugrundegelegten Verbrauchsfunktion.

Aus dem konstanten Verhältnis von Zinskosten und bestellfixen Kosten läßt sich nun eine weitere interessante Schlußfolgerung ableiten. Die Literatur ist der Meinung, daß die Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit stets durch eine gleichseitige Hyperbel beschrie-

ben werden kann[12], während die Kurve der bestellfixen Kosten durch den Koordinatenursprung geht. Da im Schnittpunkt einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Ursprungsgeraden die Steigungen beider Funktionen stets absolut gleich sind, zeichnet sich das Optimum sowohl durch die Gleichheit der Grenzbeschaffungskosten in Bezug auf die Bestellhäufigkeit wie durch die Gleichheit von Zinskosten und bestellfixen Kosten aus. Dieses Ergebnis wird von (143) vollauf bestätigt.

Nun besagt (143) aber auch, daß bei allen nichtlinearen Verbrauchsfunktionen das Verhältnis zwischen Zinskosten und gesamten bestellfixen Kosten ungleich 1 sein muß. Daraus folgt unmittelbar, daß die Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit bei nichtlinearen f(t) nicht die Form einer gleichseitigen Hyperbel haben kann. Dieses Ergebnis wird durch die Näherungslösung der Differentialgleichung in Abschnitt III dieses Kapitels, eine e-Funktion, bestätigt.

Eine weitere Stütze erfährt die oben gemachte Aussage, wenn als Verbrauchsfunktionen beliebige Polynome f(t) $= \sum_{i=o}^{r} \alpha_i t^i$ zugelassen werden. Hier ist kein konstantes Verhältnis zwischen Zinskosten und gesamten bestellfixen Kosten zu erwarten. Das Verhältnis beider ist vielmehr zusätzlich vom jeweiligen Funktionswert, d.h. vom Umfang von $f(t_n)$, abhängig. Wenn aber überhaupt kein konstantes Verhältnis vorliegt, dann ist dieses Verhältnis auch sicher nicht gleich 1. Damit aber ist die Gleichheit von Zinskosten und gesamten bestellfixen Kosten im Optimum, wie (143) besagt, auf den Spezialfall linearer Verbrauchsfunktionen beschränkt.

7. Ergebnisse der Lösung unter Ganzzahligkeitsbedingungen

Im Gegensatz zur Lösung in Abschnitt III gelingt bei einem realistischen Ansatz unter Berücksichtigung von Ganzzahlig-

12) Vgl. die in Fußnote 13) der Einleitung angegebenen Autoren

keitsbedingungen eine lückenlose Beschreibung der optimalen Bestellweise und die Berechnung der zu ihrer Bestimmung erforderlichen Parameter in einem einzigen Rechengang. In speziellen Fällen ist die optimale Bestellweise geometrisch anschaulich. Bei allgemeiner gehaltenen Ansätzen wird sie zunehmend abstrakt; doch sind auch hier Lösungen verfügbar.

Der Lösungsansatz besteht aus einem System von n Gleichungen mit n+1 unbekannten Variablen, nämlich den einzelnen Bestellzeitpunkten und dem Endpunkt der gesamten Planungsperiode. Die Lösung gestattet eine Aussage über die optimale Relation der Bestellintervalle (Bestellmengen) untereinander sowie eine Aussage über die absolute Größe der Planungsperiode (der insgesamt zu beschaffenden Menge) im Optimum. Beide Aussagen zusammen ermöglichen die Determinierung der optimalen Bestellweise im Zeitablauf, ohne daß ein zweiter Ansatz zur Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit erforderlich wird. Die Forderung der Ganzzahligkeit der Bestellhäufigkeit ist berücksichtigt. Im Gegensatz zum voraufgegangenen Abschnitt ist die Lösung allgemein, d.h. sie gilt für alle Materialverbrauchsfunktionen mit den Eigenschaften der Stetigkeit, der Differenzierbarkeit und des monotonen Steigens.

Für eine begrenzte Gruppe von Verbrauchsfunktionen, nämlich für Potenzfunktionen, ergab sich im Optimum ein konstantes, vom Exponenten der jeweiligen Verbrauchsfunktion abhängiges Verhältnis zwischen Zinskosten und gesamten bestellfixen Kosten. Mit diesem Ergebnis wird die Annahme der Literatur, die Abhängigkeit der Zinskosten von der Bestellhäufigkeit sei durch eine gleichseitige Hyperbel zureichend beschrieben, auf den Spezialfall einer linearen Verbrauchsfunktion beschränkt. Im allgemeinen wird diese Abhängigkeit durch kompliziertere Funktionen - etwa e-Funktionen - beschrieben werden müssen.

Ferner gelang der allgemeine Nachweis, daß unter den vielen denkbaren Bestellweisen bei allen zulässigen, d.h. monoton steigenden Verbrauchsfunktionen stets eine Bestellweise mit geringsten Kosten existieren muß, daß also das Problem der optimalen Bestellweise identisch ist mit der Minimierung der Beschaffungskosten. Der spezielle Beweis für spezielle analytische Funktionen ist, obzwar recht aufwendig, ebenfalls für jede denkbare f(t) möglich, wie das angegebene Verfahren beweist.

Da das Gleichungssystem einen echten Freiheitsgrad besitzt, ist es möglich, anstatt der Anzahl der Bestellungen die Länge der Planungsperiode vorzugeben und das System zur Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit und der optimalen Aufteilungsweise zu benutzen, wie das in Abschnitt III geschehen ist, wobei allerdings die Umständlichkeit des dort gezeigten Lösungsweges vermieden ist.

Dritter Hauptteil: Optimale Bestellweise bei veränderlichem Verbrauch und bei veränderlichen Preisen

I. Vorbemerkungen

Bisher hatten wir die Annahme gemacht, daß der Einstandspreis pro Stück im Zeitablauf konstant sei. Diese Annahme wird nun zugunsten veränderlicher Preise im Zeitablauf aufgegeben.

Die im Untersuchungsmodell benutzten Preisfunktionen - allgemein als p(t) bezeichnet - werden als stetig und differenzierbar angenommen. Es wird jede Funktion ohne Einschränkung zugelassen, sofern sie die oben erwähnten Eigenschaften besitzt. In p(t) ist unter anderem die unrealistische Annahme enthalten, daß der Anbieter seinen Angebotspreis in infinitesimal kleinen Zeiträumen verändert und der Nachfrager diesen Angebotspreis durch die Art der Bestellpolitik nicht beeinflussen kann.

In den folgenden Untersuchungen werden gleichzeitig Materialverbrauch und Einstandspreis als von der Zeit abhängig angenommen.

II. Allgemeine Lösungsansätze bei veränderlichem Verbrauch und bei veränderlichem Preis

Preisänderungen im Zeitablauf bewirken - auch wenn sie sich als stetige Funktionen der Zeit darstellen lassen - eine sprungweise Änderung des Einstandspreises bei jeder erneuten Bestellung. Dabei muß man die Wirkung der Preisänderung auf die Einstandskosten und die Wirkung auf die Zinskosten auseinanderhalten.

Um die Wirkung der Preisänderung auf die Einstandskosten zu analysieren, wandeln wir die unmittelbare Abhängigkeit der Preisänderung im Zeitablauf - also p(t) - in eine mittelbare Abhängigkeit von der Zeit, nämlich in eine solche vom zeitlichen Materialverbrauch, um. Wir definieren:

(144) $f(t) = y$

(145) $p(t) = p^*\{f(t)\} = p^*(y)$

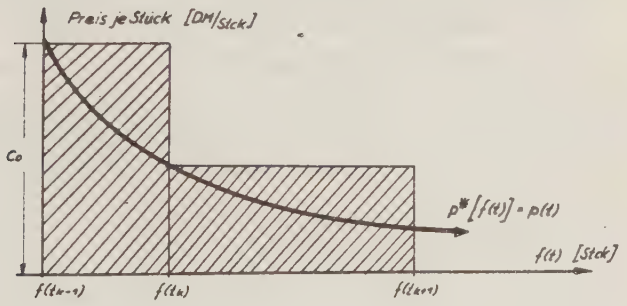
Daraus folgt, daß

(146) $$\int_0^T p(t)dt = \int_0^{f(t_n)} p^*\{f(t)\}df(t) = \int_0^{y_T} p^*(y)dy$$

Wenn wir also über y bzw. f(t) integrieren, erhalten wir die gesamten Einstandskosten mit der Dimension $[(\text{DM/Stück})(\text{Stück})] = [\text{DM}]$, und zwar bei stetiger Bestellung.

Nun wollen wir aber nicht stetig bestellen, was unendlich hohe bestellfixe Kosten zur Folge haben würde, sondern jene Bestellpolitik bestimmen, bei der die Gesamtkosten am niedrigsten sind. Im Falle sinkender Preise im Zeitablauf erhalten wir folgendes Bild:

Abb. 12: Wirkung der Aufteilungsweise auf die Einstandskosten bei sinkendem Einstandspreis



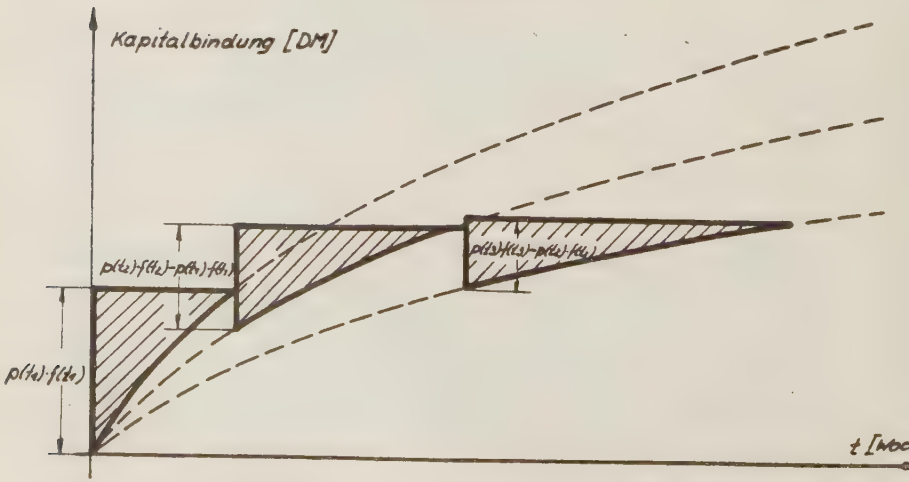
Auf der Ordinate haben wir den zu einem Verbrauchszeitpunkt geltenden Stückpreis p(t) bzw. $p^*\{f(t)\}$ abgetragen, auf der Abszisse den Verbrauch im Zeitablauf. Zum Zeitpunkt t_{k-1} beträgt der Stückpreis $p(t_{k-1}) = p^*\{f(t_{k-1})\} = c_o$. Die erste Bestellung erfolgt also zum höchsten Einstandspreis. Würde die gesamte Menge $M \equiv f(t_n)$ auf einmal bestellt, so würden sich die Einstandskosten auf einer

Parallelen im Abstand von c_o zur Abszisse bewegen. Es wird jedoch ein zweites Mal bestellt, zum Zeitpunkt t_k. Inzwischen ist der Einstandspreis auf $p(t_k) = p^*\{f(t_k)\}$ gesunken usw..

Wir sehen, daß die Einstandskosten umso niedriger ausfallen, je häufiger bestellt wird. Bei gegebener Bestellhäufigkeit werden nun offensichtlich die geringsten Einstandskosten insgesamt und damit die geringsten Einstandskosten pro Stück gezahlt, wenn die schraffierten Flächen in Abb. 12 minimiert werden. Eine ähnliche Situation finden wir bei steigenden Preisen vor.

Zur Analyse der Wirkung von Preisänderungen auf die Kapitalbindung tragen wir auf der Ordinate die Kapitalbindung, auf der Abszisse die Zeit ab. Zum Zeitpunkt t_1 beträgt der Einstandspreis $p(t_1)$. Es möge ein im Zeitablauf fallender Stückpreis von der Form $c_o - bt^r$ gegeben sein. Die erste Bestellung erfolgt also wiederum zum höchsten Preis. Würde zu diesem Zeitpunkt die gesamte Menge $f(t_n)$ bestellt, so würde sich der Abbau des gebundenen Kapitals entlang der Funktion $p(t_1) \cdot f(t)$ bewegen. Diese Funktion ist in Abb. 13 als oberste der drei Kurven eingezeichnet.

Abb. 13: Wirkung der Aufteilungsweise auf die Kapitalbindung bei fallendem Einstandspreis



Im Verlauf des ersten Bestellintervalls fällt der Stückpreis stetig weiter, bis er zum Zeitpunkt der zweiten Bestellung, nämlich t_2, auf $p(t_2) = c_o - bt_2^r$ gesunken ist. Würde jetzt die gesamte noch ausstehende Menge bestellt, so würde sich der Abbau des gebundenen Kapitals entlang der Funktion $p(t_2)f(t)$, also auf niedrigerem Niveau, nämlich auf der in Abb. 13 als mittlere Kurve eingezeichneten Kapitalbindungsfunktion bewegen usw..

Die Höhe der durch eine bestimmte Bestellweise verursachten Kapitalbindung ist proportional der in Abb. 13 gezeichneten Summe der schraffierten Flächen, denn diese Flächen repräsentieren als Produkte aus Bestellmengen und zugehörigem Einstandspreis je Stück (Ordinatenwert) sowie der zugehörigen Lagerzeit (Abszissenwert) die während jedes Intervalls im Lager gebundenen Kapitalbeträge. Die Größe der schraffierten Flächen hängt von drei Faktoren ab: von der Länge des jeweiligen Bestellintervalls, vom Produkt aus bestellter Menge mal zugehörigem Stückpreis und von der Ordnungszahl der jeweiligen Bestellung, denn $p(t_{k-1}) \gtrless p(t_k) \gtrless p(t_{k+1})$ usw..

Wir berechnen die Größe der Kapitalbindung analog zum Ansatz in Kapitel 2, indem wir zunächst die Rechtecke $p(t_k)f(t_k)(t_k - t_{k-1})$ eines jeden Intervalls bestimmen und davon das Integral der Funktion $p(t)f(t)$ in einem jeden Intervall abziehen.

Jede Bestellweise wird nun andere Gesamtkosten zur Folge haben. Es wird diejenige Bestellweise gesucht, die mit den geringsten totalen Stückkosten verbunden ist. Geometrisch ausgedrückt: Es wird diejenige Bestellpolitik gesucht, die die schraffierten Flächen in Abb. 12 und Abb. 13 sowie die bestellfixen Kosten zugleich zu einem Minimum macht.

Die gesamten Kosten der Bestellweise werden in Analogie zum Problem bei konstantem Einstandspreis durch folgenden Ansatz charakterisiert:

$$(147)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k) - f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - p(t_{k-1}).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Der erste Summenausdruck von (147) entspricht dabei dem Schaubild 12, der zweite Summenausdruck dem Schaubild 13, während nS bereits aus dem zweiten Kapitel bekannt ist. In (147) ist mit einem Einstandspreis je Stück gerechnet worden, wie er zu Beginn des Bestellintervalls gerade herrscht. Dimensionsmäßig ergibt sich für alle Ausdrücke von (147): [DM/Stück].

Ein zweiter, möglicher Lösungsansatz kann mit einem Stückpreis p(t) konstruiert werden, wie er sich bei einer - hypothetischen - Bestellung am Ende jedes Intervalls ergeben würde. Man kann sagen, daß in diesem Falle vom reinen Wiederbeschaffungspreis ausgegangen wird:

$$(148)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_k)\left\{f(t_k) - f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_k)f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - p(t_k).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Der Ansatz von Wiederbeschaffungspreisen - in der Kostenrechnung üblich - hat hier jedoch wenig Sinn, weil es sich hier um reine Planungsüberlegungen handelt, die vor den Einkaufsakt geschaltet sind. Der Ansatz von Wiederbeschaffungspreisen würde das eigentliche Problem verwässern, das ja darin besteht, die tatsächlichen (nicht irgendwelche fiktiven) Beschaffungskosten zu minimieren. Ein Ansatz von Wiederbeschaffungskosten wäre allenfalls dann gerechtfertigt, wenn dieser Ansatz als Entscheidungsunterlage für die Hereinnahme von Zusatzaufträgen und der dafür erforder-

lichen Beschaffung von Material benutzt würde. Da der Absatzsektor bei allen unseren Überlegungen streng konstant gehalten wird, entfällt dieser Gesichtspunkt.

Lediglich bei der Berechnung der Zinskosten könnte man von einem Wiederbeschaffungspreis ausgehen, weil ja die Berechnungsgrundlage der Lagerkosten als proportional zum Wert des eingekauften Materials angenommen wird, dieser Wert sich aber mit Preisänderungen im Zeitablauf ändert. Berücksichtigt man in jedem Augenblick den gerade herrschenden Wiederbeschaffungspreis, dann erhält man folgenden Ansatz:

$$(149)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k) - f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_k)f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(t)f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Wir wollen im folgenden nur die Ansätze (147) und (149) benutzen.

III. Die optimale Bestellweise bei variablem Verbrauch und variablen Preisen

1. Beschreibung des Modells

Es sei angenommen, daß der Unternehmer über einen hinreichend großen ökonomischen Horizont verfüge, um innerhalb seiner gewünschten Planungsperiode die Höhe seines Materialverbrauchs und die Höhe des jeweils herrschenden Einstandspreises zu jedem Zeitpunkt angeben zu können. Der Horizont lasse es ferner zu, die Entwicklung des Materialverbrauchs und des Einstandspreises als stetige, differenzierbare Funktion der Zeit zu beschreiben. Der Verlauf dieser Funktionen ist beliebig, sofern er sich in dem in (150) definierten Gebiet bewegt. Zwischen Preis- und Materialverbrauchsfunktionen ist jede Kombination denkbar und zulässig. Im übrigen gelten die gleichen Bedingungen wie im Hauptteil 2.

2. Ableitung der optimalen Aufteilungsweise

Wir nehmen den Lösungsansatz (147) zum Ausgangspunkt der Betrachtung:

$$(147)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k) - f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1}) f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - p(t_{k-1}) \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Die t_k sollen wiederum so numeriert sein, daß $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist, d.h. daß

$$(150)\quad \mathfrak{t} \in \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{t} = F^*(t_1, \ldots, t_n)$$

ist. Wenn die Bestellweise optimal sein soll, muß Gleichung (147) ein Minimum annehmen. Die Funktion $F^*(\mathfrak{t}) = F^*(t_1, \ldots, t_n)$ besitzt einen Extremwert im Punkte $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$, wenn

$$(151)\quad \delta F^* = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t_k}\right)_{\mathfrak{t}_0} \cdot \delta t_k = 0$$

gilt. Aus (151) folgt, daß im Punkte $(t_{o1}, \ldots, t_{on})$ alle $\partial F^*/\partial t_k$ gleich Null sein müssen, denn innerhalb des durch (150) definierten Gebietes $\mathfrak{G}$ sind die t_k bis auf das vorgegebene t_n völlig frei wählbar; für t_n gilt zusätzlich $\delta t_k = 0$.

Wir definieren:

$$(152)\quad F^*(\mathfrak{t}) = u.v.w$$
$$(153)\quad u = p(t)$$
$$(154)\quad v = f(t)$$
$$(155)\quad w = t_k - t_{k-1}$$

Dann läßt sich (151) wie folgt ausdrücken:

$$(156)\quad \delta F^* = \frac{\partial F^*}{\partial u} v.w + \frac{\partial F^*}{\partial v} u.w + \frac{\partial F^*}{\partial w} u.v = 0$$

Für die ersten n-1 t_k finden wir:

$$(157)\quad \frac{\partial F^*}{\partial t_k} = p(t_{k-1})f(t_k)+p'(t_k)\Big\{f(t_{k+1})-f(t_k)\Big\}-p(t_k)f'(t_k)$$
$$+ip(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+ip(t_{k-1})f(t_k)$$
$$-ip(t_k)f(t_{k+1})+ip'(t_k)f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)$$
$$-ip(t_{k-1})f(t_k)+ip(t_k)f(t_k)-ip'(t_k).\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt$$
$$= 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$
$$= \Big\{p'(t_k)-ip(t_k)\Big\}\Big\{f(t_{k+1})-f(t_k)\Big\}-f'(t_k)\Big\{p(t_k)$$
$$-p(t_{k-1})\Big\}+ip(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+ip'(t_k).$$
$$\Big\{f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\Big\} = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Für das letzte t_k, nämlich t_n, gilt voraussetzungsgemäß:

$$(158)\quad \frac{\partial F^*}{\partial t_n} = 0$$

Es ist offensichtlich, daß die Lösung unanschaulich geworden ist und kaum mehr geometrisch interpretiert werden kann. Um die Struktur der Lösung ein wenig durchsichtiger zu machen, wollen wir den Einfluß der Einstandskosten und den der Kapitalbindung auf die Optimumbedingungen in (157) getrennt untersuchen. Zur weiteren Vereinfachung gehen wir dabei vom Lösungsansatz (149), also von einer Verzinsung vom jeweils in jedem Augenblick herrschenden Wiederbeschaffungspreis aus. Für die ersten n-1 t_k finden wir aus (149):

$$(159)\quad \frac{\partial F^*}{\partial t_k} = p'(t_k)\Big\{f(t_{k+1})-f(t_k)\Big\}-f'(t_k)\Big\{p(t_k)-p(t_{k-1})\Big\}$$
$$+i(t_k-t_{k-1})\Big\{f'(t_k)p(t_k)+p'(t_k)f(t_k)\Big\}+ip(t_k).$$
$$f(t_k)-ip(t_{k+1})f(t_{k+1}) = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

1. Wenn wir den Ausdruck der Einstandskosten (1. Zeile von (159) bzw. (157)) für sich allein betrachten, erhalten wir

$$(160)\quad p'(t_k)\Big\{f(t_{k+1})-f(t_k)\Big\} = f'(t_k)\Big\{p(t_k)-p(t_{k-1})\Big\}$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

d.h. bei einem Zinsfuß von Null Prozent erhalten wir als Optimumbedingung der restlichen Beschaffungskosten

$$(161)\quad \frac{p'(t_k)}{p(t_k)-p(t_{k-1})} = \frac{f'(t_k)}{f(t_{k+1})-f(t_k)}$$

$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Nach (161) hat ein beliebiges Bestellintervall k dann seine optimale Länge, wenn sich das Änderungsvermögen der Preisfunktion im Bestellzeitpunkt eines Intervalls zum absoluten Änderungsbetrag des Stückpreises im Vorintervall verhält wie das Änderungsvermögen der Verbrauchsfunktion im Bestellzeitpunkt zur bestellten Menge.

Werden sowohl Verbrauchsfunktion wie Preisfunktion linear angenommen, so ergibt sich bei steigenden wie fallenden Preisen:

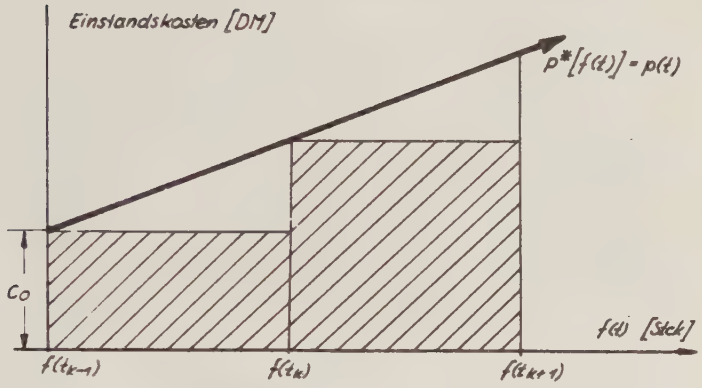
$$(162)\quad \frac{\pm b}{a} = \frac{c_o \pm bt_k - c_o \mp bt_{k-1}}{at_{k+1} - at_k}$$

$$t_{k+1}-t_k = t_k-t_{k-1},$$

also konstante Intervallängen. Das bedeutet also, daß bei einer Kombination von linearen Verbrauchsfunktionen mit linearen Preisfunktionen Abweichungen von einer konstanten Intervallänge durch die Einstandskosten nicht verursacht werden. Erst bei einer Kombination von linearen mit nichtlinearen oder von nichtlinearen mit nichtlinearen Funktionen erstehen veränderliche optimale Intervallängen.

Zu erwähnen ist ferner, daß (161) bzw. (160) bei steigenden Preisen ein Maximum der Einstandskosten ergibt, denn das Minimum würde bei einmaliger Bestellung zum Anfangspreis c_o liegen, wie eine Betrachtung von Abb. 14 erkennen läßt.

Abb. 14: Entwicklung der Einstandskosten bei steigenden Preisen



Dieser Sachverhalt wird durch die zweite Ableitung von (161) bestätigt:

$$(162a)\quad \frac{\partial^2 F^*}{\partial t_k^2} = p''(t_k)\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\}-f''(t_k)\left\{p(t_k)-p(t_{k-1})\right\} \\ -2p'(t_k)f'(t_k)$$

Sind beide Funktionen linear, so werden die Klammerausdrücke Null. Übrig bleibt das letzte Glied:

$$-2p'(t_k)f'(t_k) < 0, \text{ also Max!}$$

Nur bei fallenden Preisen, also negativer erster Ableitung, erhalten wir in jedem Fall die Kriterien für ein Minimum. Diese Tatsache wird uns später noch eingehend beschäftigen.

2. Betrachten wir die Kosten der Kapitalbindung isoliert, dann erhalten wir nach Gleichung (159):

$$(163)\quad i(t_k-t_{k-1})\left\{f'(t_k)p(t_k)+p'(t_k)f(t_k)\right\}+ip(t_k)f(t_k) \\ -ip(t_{k+1})f(t_{k+1}) = 0 \\ (1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Wir definieren f*(t) als Symbol für die Höhe der Kapitalbindung p(t)f(t):

(164) $f^*(t_k) = p(t_k)f(t_k)$

(165) $f^{*\prime}(t_k) = p(t_k)f'(t_k)+p'(t_k)f(t_k)$

und finden aus Gleichung (163) durch die Substitution:

(166) $i\left\{f^{*\prime}(t_k)(t_k-t_{k-1})+f^*(t_k)-f^*(t_{k+1})\right\} = 0$

Gleichung (166) aber entspricht formal genau unserer Gleichung (58) im 2. Kapitel, also der Lösung für veränderlichen Materialverbrauch. Anstelle der Bestimmung der optimalen Intervallänge durch die Verbrauchsfunktion allein (wir konnten ja den konstanten Einstandspreis herauskürzen) ist eine solche durch die Entwicklung der Kapitalbindung im Zeitablauf getreten:

(167) $t_k-t_{k-1} = \dfrac{f^*(t_{k+1})-f^*(t_k)}{f^{*\prime}(t_k)}$

Wir sind also in der Lage, eine gewisse Verwandtschaft der Lösungen nachzuweisen.

Um die Analyse noch einen Schritt weiterzutreiben, wollen wir die Entwicklung der Intervalle in ausschließlicher Abhängigkeit von den Zinskosten bei veränderlichen Preisen formelmäßig darstellen. Wir gehen von Gleichung (157) aus und wählen $n = 2$[1]. Aus (157) erhalten wir zunächst die Zinskosten:

(168) $i\Big\{p(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+p(t_{k-1})f(t_k)-p(t_k)f(t_{k+1})$
$+p'(t_k)f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)-p(t_{k-1})f(t_k)+p(t_k)f(t_k)$
$-p'(t_k).\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\Big\} = 0$

$= p(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+p'(t_k)f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)$
$-p(t_k)f(t_{k+1})+p(t_k)f(t_k)-p'(t_k).\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt = 0$

Da nur die grundsätzlichen Zusammenhänge interessieren, dürfen wir vereinfachend Linearität von Verbrauchs- und Preisfunktion annehmen. Wir definieren daher:

(169) $f(t) = at$

(169a) $f(t_n) = aT$

(170) $p(t) = c_o \pm bt$

1) Fußnote 1) siehe S. 95

a) Für steigende Preise, also für $p(t) = c_o + bt$, erhalten wir aus (168) für n = 2:

$$(171)\quad c_o at-(c_o+bt)aT+(c_o+bt)at+baT(T-t)-\frac{baT^2}{2}+\frac{bat^2}{2}=0$$

$$=3bt^2+(4c_o-4bT)t=2c_oT-bT^2$$

$$(172)\quad t=-\frac{2c_o-2bT}{3b}\pm\sqrt{\left(\frac{2c_o-2bT}{3b}\right)^2+\frac{2c_oT-bT^2}{3b}}$$

Da t keine negativen Werte annehmen kann, entfällt der Minuswert der Wurzel. Gleichung (172) besagt, daß der optimale Zeitpunkt der 3. Bestellung-(die 1. Bestellung liegt ja im Zeitpunkt t_o fest)-abhängig ist vom Anfangspreis c_o, vom Preisanstieg b und von der Länge der gesamten Planungsperiode T. Es handelt sich bei (172) tatsächlich um ein echtes Minimum, denn

$$(173)\quad \frac{d^2F^*}{dt^2}=6bt+4c_o-4bT>0$$

d.h. t ist abhängig von T; somit kann 4bT absolut nie größer als $6bt + 4c_o$ werden.

Für alternative Preisanstiege b finden wir folgende Tabelle:

Tabelle I: Optimaler Bestellzeitpunkt (t_1) und Bestellintervalle (T_1, T_2) bei n = 2 und variablem, positivem[2] b in Bruchteilen von T

b	t	T_1	T_2	b	t	T_1	T_2
0,0	0,500	0,500	0,500	0,7	0,551	0,551	0,449
0,1	0,505	0,505	0,495	0,8	0,559	0,559	0,441
0,2	0,510	0,510	0,490	0,9	0,567	0,567	0,433
0,3	0,518	0,518	0,482	1,0	0,578	0,578	0,422
0,4	0,528	0,528	0,472	1,2	0,595	0,595	0,405
0,5	0,535	0,535	0,465	2,0	0,666	0,666	0,334
0,6	0,545	0,545	0,455	3,0	0,738	0,738	0,262

Fußnote 1) v. S. 94

1) Für n > 2 gibt es aus schon genannten Gründen (vgl. Kapitel 2) keine formelmäßige Darstellung mehr.

Eine Betrachtung der Tabellenwerte ergibt, daß der sich optimal verhaltende Unternehmer einen Großteil der insgesamt zu beschaffenden Menge M in die Teilperiode mit niedrigem Einstandspreis, nämlich T_1, verlegt, wie es ja auch zu erwarten war. Wesentlich ist die Tatsache, daß die Bestellintervalle nicht mehr eine konstante Länge aufweisen, sondern, je nach Konstellation der Parameter, mehr oder weniger ungleich lang ausfallen.

b) Bei fallenden Einstandspreisen, also $p(t) = c_o - bt$, haben wir folgendes Bild:

$$(174)\quad t = \frac{2c_o+2bT}{3b} - \sqrt{\left(\frac{2c_o+2bT}{3b}\right)^2 - \frac{2c_o+bT^2}{3b}}$$

$$(175)\quad \frac{d^2F^*}{dt^2} = 4c_o + 4bT - 6bt > 0, \text{ also Min!}$$

Für alternative b finden wir die nachstehenden Werte:

Tabelle II: Optimale Bestellzeitpunkte und Bestellintervalle bei n = 2 und variablem, negativem b

b	t	T_1	T_2
0,0	0,500	0,500	0,500
-0,3	0,483	0,483	0,517
-0,5	0,472	0,472	0,528
-0,8	0,458	0,458	0,542
-1,0	0,451	0,451	0,549
-3,0	0,416	0,416	0,584

Ohne daß die Tabelle fortgesetzt wird, erkennt man bereits die Tendenz der Entwicklung: Je stärker die Preise im Zeitablauf sinken, je größer die negative Steigung der Preisfunktion also wird, umso kürzer fällt das erste Bestellintervall T_1 zugunsten des zweiten Intervalls aus, d.h. der Bestellzeitpunkt für die zweite Bestellung verlagert sich umso mehr zum Periodenanfang hin, je größer die negative Steigung der Preisfunktion wird. Diese Handlungsweise entspricht im übrigen auch dem gesunden Menschenverstand, einen Großteil der zu beziehenden Mengen in die Zeiten niedriger Einstandspreise zu verlagern.

3. Nachdem wir nun die Wirkung der Einstandskosten und der Zinskosten auf das Optimum der Aufteilungsweise isoliert betrachtet haben, wollen wir jetzt - wiederum für n = 2 - die gesamten Optimumbedingungen formelmäßig ausdrücken. Ausgangspunkt ist, wie bisher, Gleichung (157):

(157)

$$\frac{\partial F^*}{\partial t_k} = \left\{p'(t_k)-ip(t_k)\right\}\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\}-f'(t_k)\left\{p(t_k)-p(t_{k-1})\right\}$$
$$+ip(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+ip'(t_k)\left\{f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)\right.$$
$$\left.-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\right\} = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Unter Benutzung der in (169) bis (170) definierten Funktionen finden wir für n = 2:

(176) $$(b-ic_o-ibt)(aT-at)-a(c_o+bt-c_o)+ic_oat+ibaT^2-ibaTt$$
$$-\frac{ibaT^2}{2}+\frac{ibat^2}{2} = 0$$

(177)

$$t = -\frac{2ic_o-2ibT-2b}{3ib} \pm \sqrt{\left(\frac{2ic_o-2ibT-2b}{3ib}\right)^2 + \frac{T(2ic_o-2b)-ibT^2}{3ib}}$$

(178) $$\frac{d^2F^*}{dt^2} = 3ib + 2ic_o - 2ibT - 2b \gtrless 0,$$

also je nach Konstellation der Parameter ein Minimum oder ein Maximum. Dieser Sachverhalt verlangt nach ökonomischer Interpretation.

Für große Anfangspreise c_o und für große Zinsfüße i, dagegen für kleine negative Preisanstiege b haben wir zunächst zweifelsohne ein Minimum vor uns. Vergrößern wir b nun langsam, so wird die Minimumkurve zunehmend flacher, geht sodann durch Null und wird endlich zum Maximum. Das Kalkül wird also bei einer bestimmten Konstellation der Parameter "umkippen", d.h. man findet auf der reellen Zahlengeraden keinen Punkt mehr, bei dem der Zuwachs (Wegfall) von Zinskosten gerade gleich dem Wegfall (der Zunahme) der Einstandskosten wäre. Vielmehr ist die Veränderung der Einstandskosten bei jeder denkbaren Be-

stellpolitik dauernd absolut größer als diejenige der Zinskosten. Damit ist das Problem entartet, weil keine echte Wahlmöglichkeit mehr besteht. Das Optimum läge in einem solchen Fall bei sofortiger einmaliger Bestellung der Gesamtmenge, was durch die Forderung n = 2 verhindert wird. Der genannte Entartungsfall tritt nicht ein, wenn der Einstandspreis im Zeitablauf fällt:

(179)

$$t = \frac{2ic_o+2ibT+2b}{3ib} - \sqrt{\left(\frac{2ic_o+2ibT+2b}{3ib}\right)^2 - \frac{T(2ic_o+2b)+ibT^2}{3ib}}$$

(180) $$\frac{d^2F^*}{dt^2} = 2b + 2ibT + 2ic_o - 3ibt > 0,$$

denn $|3ibt| \ll 2b + 2ibT + 2ic_o$; also handelt es sich hier in jedem Fall um ein Minimum.

Verallgemeinernd können wir von den in (176) bis (180) genannten Ergebnissen auf das grundsätzliche Verhalten der Optimumbedingung (157) schließen, daß bei fallenden Preisen und gegebener Bestellhäufigkeit in jedem Fall ein Minimum der gesamten Beschaffungskosten existiert. Bei steigenden Preisen und gegebener Bestellhäufigkeit muß dagegen in jedem einzelnen Fall untersucht werden, ob das ermittelte Ergebnis minimale Beschaffungskosten zur Folge hat, oder ob der Entartungsfall vorliegt, bei dem es günstiger ist, in einer einmaligen Bestellung die gesamte Menge $f(t_n)$ zu beziehen.

Das exakte Minimumkriterium, hinreichend für alle Preisfunktionen und für alle Kombinationen von Preisfunktionen mit Verbrauchsfunktionen, liefert nur der bereits in Kapitel 2 erwähnte Ansatz (112):

(112) $$(\nabla \mathfrak{h})^2 F^*(\mathfrak{t}_{ok}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} F^*(\mathfrak{t}_{ok}) > 0$$

$$|\mathfrak{H}| \neq 0$$

mit $\mathfrak{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Wenn (112) erfüllt ist, handelt es sich mit Sicherheit im Punkt des jeweils ermittelten Extremwertes um ein Minimum.

Bei einem Lösungsansatz zu Wiederbeschaffungspreisen, z.B. bei (149), zeigen sich grundsätzlich die gleichen Erscheinungen, wenn auch in abgemilderter Form. Das liegt daran, daß in einem solchen Fall die Preisänderungen nicht so drastisch auftreten, weil von vornherein von einem bereits gestiegenen (gefallenen) Preis ausgegangen wird. - Eine explizite Ableitung der Optimumbedingungen auch für (149) würde lediglich quantitative Unterschiede, aber kaum neue Erkenntnisse bringen und soll daher unterbleiben.

3. Simultane Bestimmung der optimalen Bestellhäufigkeit und der optimalen Aufteilungsweise

Wenn es gelingt, den Ausdruck (157) zu lösen, d.h. in eine Funktion mit der Bestellhäufigkeit n als Argument zu bringen, kann auch das simultane Optimumproblem von Bestellhäufigkeit und Aufteilungsweise unter den Bedingungen variablen Verbrauchs und variabler Preise allgemein als gelöst gelten.

Leider sind solche Funktionen nur in Form von Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen zu beschreiben, deren Lösung große Schwierigkeiten macht. Bezüglich der Einzelheiten sei auf den Hauptteil 2, S. 56 ff., verwiesen. Hinzu kommt, daß die Bedingungen für das Optimum der Bestellweise recht unanschaulich sind und sich nur schwer interpretieren lassen. Die Nichtbeachtung der Ganzzahligkeit der Lösung wirft weitere Fragen auf. Diese Schwächen sollen nun durch einen etwas realistischeren Ansatz vermieden werden.

4. Simultanlösung unter Ganzzahligkeitsbedingungen

Bezüglich des Untersuchungsmodells mögen die gleichen Bedingungen wie im entsprechenden Modell des 2. Hauptteils (S. 37 ff.) gelten:

(1) Der Unternehmer verfügt über einen hinreichend bemessenen Horizont, um die zeitliche Entwicklung von Verbrauch und variablen Kosten pro Stück genau prognostizieren zu können;

(2) Die Anzahl der Bestellungen wird konstant gehalten;
(3) Die gesamte zu beschaffende Menge wird in engen Grenzen variabel gehalten, so daß stets in n ganzzahligen Bestellschritten bestellt werden kann;
(4) Die variablen Kosten pro Stück (Einstandspreis und dgl.) sind im Zeitablauf veränderlich;
(5) Die bestellfixen Kapitalbeträge werden - entsprechend der eingangs getroffenen Vereinfachung - bei der Ermittlung der Zinskosten unberücksichtigt gelassen.

a) Die optimale Bestellweise bei veränderlichen Einstandspreisen

Wir nehmen wiederum den Lösungsansatz (147) zum Ausgangspunkt der Analyse:

$$(147)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k)-f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})f(t_k)(t_k-t_{k-1})-p(t_{k-1})\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Gleichung (147) soll ein Minimum annehmen, wobei zu gelten hat:

$$(181)\quad \delta F^* = 0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F^*}{\partial t_k}\right)_{t_0}\cdot \delta t_k$$

Für die ersten n-1 $\partial F^*/\partial t_k$ finden wir:

$$(182)\quad \frac{\partial F^*}{\partial t_k} = \left\{p'(t_k)-ip(t_k)\right\}\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\} - f'(t_k)\left\{p(t_k)-p(t_{k-1})\right\} + ip(t_{k-1})f'(t_k)(t_k-t_{k-1}) + ip(t_k)\left\{f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\right\} = 0$$

$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Gleichung (182) entspricht den Optimumbedingungen für die optimale Aufteilungsweise, wie wir sie in Gleichung (157) entwickelt hatten.

Für das letzte $\partial F^*/\partial t_k$, nämlich $\partial F^*/\partial t_n$, finden wir:

$$(183)\quad \frac{\partial F^*}{\partial t_n} = \frac{f(t_n)}{f^2(t_n)}\Big\{p(t_{n-1})f'(t_n)+ip(t_{n-1})f'(t_n)(t_n-t_{n-1}) +ip(t_{n-1})f(t_n)-ip(t_{n-1})f(t_n)\Big\} - - \frac{f'(t_n)}{f^2(t_n)}\Big\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\Big(f(t_k)-f(t_{k-1})\Big)+ i.\sum_{k=1}^{n}\Big(p(t_{k-1})f(t_k)(t_k-t_{k-1})-p(t_{k-1}).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\Big) + nS\Big\} = 0$$

Da $f'(t_n)$ bzw. $f^2(t_n)$ stets größer Null sein müssen, können wir unter gleichzeitiger Umformulierung wie folgt vereinfachen:

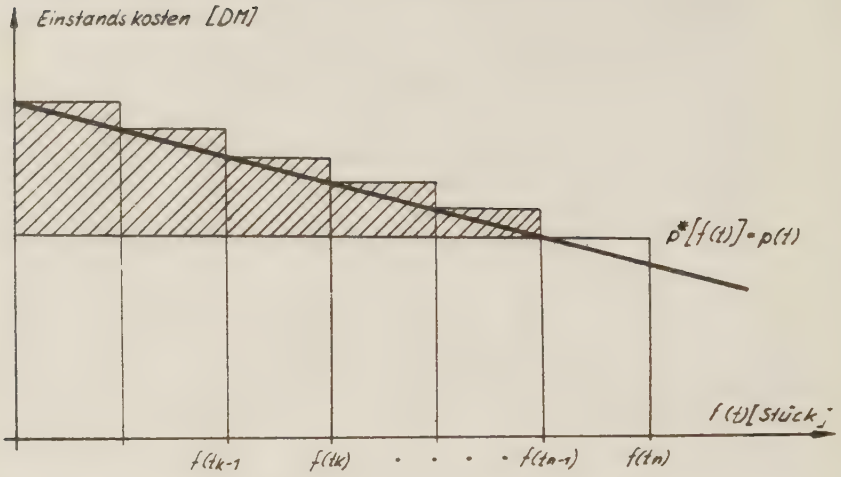
$$p(t_{n-1})f(t_n)-\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\Big\{f(t_k)-f(t_{k-1})\Big\} +i\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1}).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt-i\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})f(t_k)(t_k-t_{k-1}) +ip(t_{n-1})f(t_n)(t_n-t_{n-1})-nS = 0$$

Wenn wir das Glied $ip(t_{n-1})f(t_n)(t_n-t_{n-1})$ zum letzten Summenausdruck hinzuzählen, erhalten wir:

$$(184)\quad p(t_{n-1})f(t_n)-\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\Big\{f(t_k)-f(t_{k-1})\Big\} +i\Big\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1}).\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} p(t_{k-1})f(t_k)(t_k-t_{k-1})\Big\} = nS$$

Wir wollen nun versuchen, die Optimumbedingung (184) zu interpretieren. Die erste Zeile in (184) sagt etwas über das Verhältnis der Einstandskosten, die zweite Zeile etwas über das Verhältnis der Zinskosten zu den gesamten bestellfixen Kosten der Periode aus. Wir wollen beide Ausdrücke getrennt betrachten. Die Entwicklung der Einstandskosten im Optimum können wir durch Abb. 15 veranschaulichen:

Abb. 15: Entwicklung der Einstandskosten im Optimum der Bestellweise

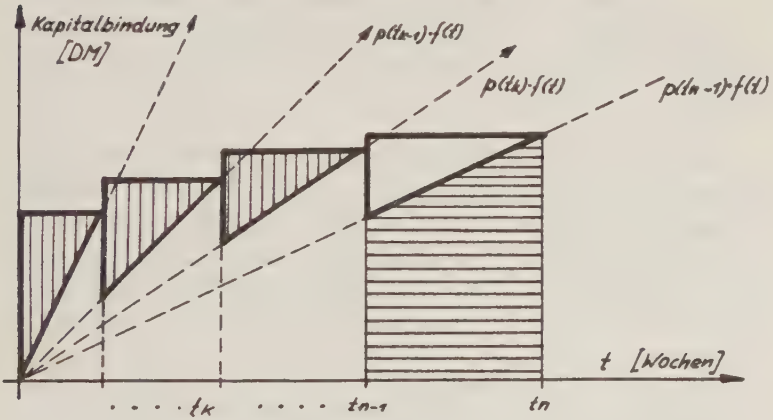


(184) besagt nun, daß die Differenz aus den tatsächlich aufgewandten Einstandskosten $\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k)-f(t_{k-1})\right\}$ und den hypothetischen Einstandskosten, die bei Bewertung der Gesamtmenge $f(t_n)$ mit dem Einstandspreis zum Zeitpunkt der letzten Bestellung t_{n-1} entstehen würden, plus den Zinskosten gleich den gesamten Bestellkosten zu sein hat. Man könnte diese Differenz der Einstandskosten - in Abb. 15 schraffiert gekennzeichnet - auch als "fiktive Ersparnis" bezeichnen, die eintreten würde, wenn für die Dauer der gesamten Planungsperiode mit dem Einstandspreis von t_{n-1} gerechnet werden müßte. Die fiktive Ersparnis ist abhängig vom Steigungsmaß der Preisfunktion und hat bei fallenden Preisen ein positives, bei steigenden Preisen ein negatives Vorzeichen. Daraus folgt, daß im Optimum ceteris paribus die Gesamtmenge $f(t_n)$ bei fallenden Preisen größer sein muß als bei steigenden Preisen.

Im zweiten Summenausdruck von (184) (untere Zeile) wird das Verhältnis von Zinskosten und gesamten bestellfixen Kosten determiniert. Und zwar soll die Summe der n Integrale unter den jeweiligen monetären Verbrauchsfunktionen

$p(t_{k-1})f(t)$ abzüglich der ersten n-1 Rechtecke $p(t_{k-1})$. $f(t_k)(t_k-t_{k-1})$ plus der Einstandskostendifferenz gleich den gesamten bestellfixen Kosten sein. Die Zinskostendifferenz im Optimum wird in Abb. 16 durch die Differenz zwischen der waagerecht schraffierten und den senkrecht schraffierten Flächen wiedergegeben:

Abb. 16: Entwicklung der Zinskosten im Optimum



Wir können die Optimumbedingung nunmehr geometrisch wie folgt ausdrücken: Die Differenz der in Abb. 16 waagerecht und senkrecht schraffierten Flächen (Zinskosten) und die schraffierte Fläche in Abb. 15 (fiktive Einstandskostenersparnis) müssen zusammen gleich den gesamten bestellfixen Kosten sein, wenn die Planungsperiode ihre optimale Länge bzw. die Gesamtmenge $f(t_n)$ ihr optimales Volumen haben soll.

Aus Abb. 15 und 16 bzw. aus (184) folgt unmittelbar, daß eine Erhöhung der bestellfixen Kosten S und/oder eine Erhöhung der Bestellhäufigkeit n die zu beschaffende Gesamtmenge erhöht, eine Verringerung der bestellfixen Kosten und/oder der Bestellhäufigkeit sie verkleinert, wobei die optimale Aufteilungsweise unberührt bleibt.

Die Stückkosten im Optimum errechnen wir durch Einsetzen von (184) in die Ursprungsgleichung (147):

$$(185)\quad F^* = \frac{p(t_{n-1})f(t_n)+ip(t_{n-1})f(t_n)(t_n-t_{n-1})}{f(t_n)}$$

Die Gesamtkosten der optimalen Planungsperiode sind demnach:

$$(186)\quad F^*f(t_n) = K = p(t_{n-1})f(t_n)\left\{1+i(t_n-t_{n-1})\right\}$$

Auch hier fällt die starke formale Übereinstimmung von (185) und (186) mit den entsprechenden Ausdrücken bei veränderlichem Verbrauch allein auf (vgl. z.B. Gleichungen (92) und (93)).

Bezüglich der Gesamtlösung (Gleichung (182) und (184) zusammengenommen) können wir - wie im Fall des veränderlichen Materialverbrauchs allein - von einem System von n Gleichungen mit n+1 echten Variablen (alle t_k bis einschließlich t_n plus der Bestellhäufigkeit n) sprechen. Bezüglich der Freiheitsgrade ergibt sich die gleiche Argumentation wie im 2. Kapitel.

Zur Berechnung der einzelnen t_k gehen wir - wie bisher - so vor, daß aus (182) die optimale Relation der t_k bestimmt wird. Aus (184) ermitteln wir den absoluten Wert von t_n und berechnen nun, rückwärts schreitend, alle t_k mit ihren absoluten Beträgen. Es darf betont werden, daß in jedem einzelnen Fall zu prüfen ist, ob Bedingung (112), nämlich $(\nabla g)^2F^*(t_{ok}) > 0$, erfüllt ist, ob also ein echtes Minimum und nicht der Fall der Entartung vorliegt.

Wir wollen nun noch die Optimumbedingungen bei Zinsen vom Wiederbeschaffungspreis (149) untersuchen. Für (149) ergeben die ersten n-1 $\partial F^*/\partial t_k$ beispielsweise:

$$(149)\quad F^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k) - f(t_{k-1})\right\}}{f(t_n)} + \frac{i\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_k)f(t_k)(t_k-t_{k-1}) - \int_0^{t_n} p(t)f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Für die ersten n-1 t_k erhalten wir:

$$(187)\ \frac{\partial F^*}{\partial t_k} = p'(t_k)\left\{f(t_{k+1})-f(t_k)\right\}-f'(t_k)\left\{p(t_k)-p(t_{k-1})\right\}$$
$$+i(t_k-t_{k-1})\left\{f'(t_k)p(t_k)+p'(t_k)f(t_k)\right\}$$
$$+ip(t_k)f(t_k)-ip(t_{k+1})f(t_{k+1}) = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Für das letzte t_k, nämlich t_n, finden wir:

$$(188)\ \frac{\partial F^*}{\partial t_n} = f(t_n)p(t_{n-1})f'(t_n)+if(t_n)p'(t_n)f(t_n)(t_n-t_{n-1})$$
$$+if(t_n)p(t_n)f'(t_n)(t_n-t_{n-1})+ip(t_n)f^2(t_n)$$
$$-ip(t_n)f^2(t_n)-f'(t_n)\left\{\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left(f(t_k)-f(t_{k-1})\right)\right.$$
$$\left.+i\sum_{k=1}^{n} p(t_k)f(t_k)(t_k-t_{k-1})-i.\int_0^{t_n} p(t)f(t)dt+nS\right\} = 0$$

Nach Vereinfachung erhalten wir als Bedingung für t_n:

$$(189)\ p(t_n)f(t_n)$$
$$-\sum_{k=1}^{n} p(t_{k-1})\left\{f(t_k)-f(t_{k-1})\right\}+i\,\frac{p'(t_n)}{f'(t_n)}\,f^2(t_n)(t_n-t_{n-1})$$
$$+i\left\{\int_0^{t_n} p(t)f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} p(t_k)f(t_k)(t_k-t_{k-1})\right\} - nS = 0$$

Wir sehen, daß sich das Bedingungssystem für das Optimum der Bestellweise nur unwesentlich im Vergleich zu (182) und (184) abwandelt, so daß wir darauf verzichten wollen, weitere Ansätze zu untersuchen.

b) Die optimale Bestellweise bei zeitabhängigen bestellfixen Kosten

Um die Wirkung zeitabhängiger bestellfixer Kosten isoliert herauszustellen, sei auf den einfachen Lösungsansatz (43) zurückgegriffen:

$$(43)\ F = \frac{\sum_{k=1}^{n} ic\left\{f(t_k)(t_k-t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\} + nS}{f(t_n)}$$

Dieser Lösungsansatz wird dahingehend abgewandelt, daß die

bestellfixen Kosten S im Zeitablauf variieren sollen:

$$(190)\quad F^{**} = \frac{\sum_{k=1}^{n} ic\left\{f(t_k)(t_k-t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right\}+n.\sum_{k=1}^{n} S(t_{k-1})}{f(t_n)}$$

Für die ersten n-1 t_k finden wir:

$$(191)\quad \frac{\partial F^{**}}{\partial t_k} = ic\left\{f'(t_k)(t_k-t_{k-1})+f(t_k)-f(t_{k+1})\right\}+nS'(t_k) = 0$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Ob wir, wie in (190) die bestellfixen Kosten zu Beginn oder am Ende des k-ten Intervalls ansetzen - dann müßten wir $S(t_k)$ schreiben - macht für (191) keinen Unterschied.

Für das letzte t_k, nämlich t_n, finden wir:

$$(192)\quad \frac{\partial F^{**}}{\partial t_n} = icf(t_n)f'(t_n)(t_n-t_{n-1})+icf(t_n)f(t_n)$$
$$-icf(t_n)f(t_n)-icf'(t_n)\left\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k-t_{k-1})\right.$$
$$\left.-\int_0^{t_n} f(t)dt+n\sum_{k=1}^{n} S(t_{k-1})\right\} = 0$$

Nach Umformung finden wir als Bedingung für die optimale Gesamtmenge $f(t_n)$ bei veränderlichen bestellfixen Kosten:

$$(193)\quad ic\left\{\int_0^{t_n} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})\right\}-n\sum_{k=1}^{n} S(t_{k-1}) = 0$$

Setzen wir dagegen die bestellfixen Kosten mit der Höhe an, die sie am Ende des k-ten Intervalls hätten, so verändert sich die Bedingung (193) zu:

$$(194)\quad \frac{\partial F^{**}}{\partial t_n} = ic\left\{\int_0^{t_n} f(t)dt-\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(t_k-t_{k-1})\right\}$$
$$+\frac{if(t_n)}{f'(t_n)}\,S'(t_n)-n.\sum_{k=1}^{n} S(t_k) = 0$$

Bei der Betrachtung von (191) und (192) bzw. (193) fällt die weitgehende formale Übereinstimmung mit den entsprechenden Optimumbedingungen bei im Zeitablauf konstanten bestellfixen Kosten auf. Der einzige Unterschied von (191)

zu den vergleichbaren Optimumbedingungen in (89) ist der zusätzliche Einfluß von S(t) auf die optimale Relation der Intervalle, während sich (193) praktisch nicht vom entsprechenden Ausdruck (91) unterscheidet.

Das ändert sich, wenn wir statt $S(t_{k-1})$ den Ausdruck $S(t_k)$, also die Höhe der bestellfixen Kosten gegen Ende eines jeweiligen Intervalls, ansetzen. Die Erklärung ist darin zu suchen, daß im Falle $S(t_{k-1})$ die Höhe der bestellfixen Kosten vom Vorintervall abhängt, also auf die Länge des k-ten und damit auf die Länge des n-ten Intervalls keinen Einfluß hat. Dagegen wird die optimale Länge des k-ten Intervalls durch den Ausdruck $S(t_k)$ direkt beeinflußt. Die Interpretation von (191) bis (194) ist die gleiche wie die der entsprechenden Ausdrücke (89) und (91) in Verbindung mit Abb. 12 und kann an dieser Stelle unterbleiben.

Grundsätzlich gestattet der gewählte Lösungsansatz eine noch weitergehende Annäherung an die Realität, etwa durch gesonderte Behandlung der Lagerkosten oder durch Einbeziehen zeitabhängiger Zinsfüße etc., wobei die Verfeinerungen naturgemäß auf Kosten der Anschaulichkeit und Praktikabilität gehen. Da uns nur allgemeine Aussagen interessieren, würden wir durch dieses Vorgehen nur wenig zusätzliche Einsicht gewinnen. Wir wollen darum die Untersuchung abschließen und uns der Zusammenfassung zuwenden.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse bei kombinierten Verbrauchs- und Preisänderungen

Die zusätzliche Einführung eines im Zeitablauf veränderlichen Preises machte das Kalkül erheblich komplizierter. Trotzdem konnten wir fast regelmäßig eine starke formale Übereinstimmung zwischen den Optimumbedingungen bei kombinierten Verbrauchs- und Preisänderungen und den entsprechenden Bedingungen bei veränderlichem Verbrauch allein beobachten.

In Analogie zum Modell mit veränderlichem Verbrauch erhielten wir auch für kombinierte Verbrauchs- und Preisänderungen eine optimale Relation der Bestellintervalle untereinander angegeben, die unabhängig vom absoluten Umfang der bezogenen Gesamtmenge besteht. Diese optimale Relation wird determiniert durch die Parameter Zinsfuß, Größe der 1. Ableitung der Verbrauchsfunktion, Anfangspreis sowie Größe und Vorzeichen der 1. Ableitung der Preisfunktion, wobei die Konstellation der Parameter im Fall von Preissteigerungen zusätzlich darüber entscheidet, ob der ermittelte Extremwert überhaupt ein Minimum ist oder ob ein Entartungsfall der Aufteilungsweise vorliegt. Um die Struktur der Lösung etwas durchsichtiger zu machen, betrachteten wir die Wirkung von Einstandskosten und von Zinskosten auf das Optimum isoliert voneinander.

Bei der Untersuchung der Wirkung der Zinskosten auf das Optimum konnte gezeigt werden, daß auch bei Linearität der untersuchten Kapitalbindungsfunktionen im Optimum der Aufteilungsweise eine Verlagerung der Intervalle bzw. der Bestellmengen stattfindet. Und zwar wandern die Bestellzeitpunkte immer dem Anstieg der Preisfunktion entgegen. Die Verlagerung ist umso stärker, je kleiner der Anfangspreis und je größer die 1. Ableitung der Preisfunktion sind, während die 1. Ableitung der Verbrauchsfunktion ohne Einfluß auf das Optimum bleibt. Der ermittelte Extremwert war ja in jedem Falle ein Minimum.

Die isolierte Betrachtung der Einstandskosten ergab, daß diese in Abhängigkeit von der Aufteilungsweise zwar ebenfalls einen Extremwert aufweisen, daß dieser jedoch nur bei fallenden Preisen ein Minimum ist, während bei steigenden Preisen Maxima auftreten.

Bei der Diskussion der Gesamtlösung mußten wir folglich den Fall mit steigenden Preisen von dem mit fallenden Preisen unterscheiden. Bei fallenden Einstandspreisen durften wir regelmäßig ein Minimumproblem erwarten; an-

ders dagegen bei steigenden Preisen, wo es entscheidend auf die Konstellation der Parameter Zinsfuß, Anfangspreis, Preisanstieg und Länge der Planungsperiode ankommt, ob ein Minimum oder ein Maximum und damit ein Entartungsfall vorliegt. Ist ein solcher Entartungsfall gegeben, dann kann durch keine wie immer geartete Bestellweise eine Minimierung der Beschaffungskosten erreicht werden. Das Optimum liegt in diesem Fall bei einmaliger Bestellung der Gesamtmenge zum Zeitpunkt t_o, also außerhalb jeglicher Aufteilungsweisen. Für alle Aufteilungsweisen mit $n > 2$ mußte in jedem Fall $(\nabla\vartheta)^2 F^*(\vartheta_{ok}) > 0$ erfüllt sein, um das Minimum mit Sicherheit zu definieren.

Bei Vorliegen eines echten Minimums konnten wir beobachten, daß selbst bei einfachsten Annahmen, z.B. bei Linearität von Verbrauchs- und Preisfunktion, die optimalen Intervallängen (Bestellmengen) nicht konstant blieben.

Bezüglich des Optimums der gesamten Bestellweise, also der simultanen Optimierung von Aufteilungsweise und Bestellhäufigkeit, fanden wir, daß sich eine vorgegebene Gesamtbedarfsmenge $f(t_n)$ im allgemeinen nicht in n ganzzahligen Bestellschritten beschaffen läßt, weshalb das Optimum mit Hilfe schwierig zu lösender Differentialgleichungen beschrieben werden mußte.

Etwas realistischere Ergebnisse erhielten wir dadurch, daß entsprechend der im 2. Hauptteil vorgeschlagenen ganzzahligen Lösung die Bestellhäufigkeit vorgegeben und bei optimaler Aufteilungsweise die Gesamtmenge $f(t_n)$ solange in engen Grenzen variiert wurde, bis sie sich in den vorgegebenen n Bestellschritten optimal beschaffen ließ. Das Optimum der Bestellweise wurde durch die Höhe der bestellfixen Kosten je Intervall und die Anzahl der vorgegebenen Bestellungen sowie durch die Höhe der Kapitalbindung, Größe der 1. Ableitung der Verbrauchsfunktion sowie Größe und Vorzeichen der 1. Ableitung der Preisfunktion bestimmt.

In Analogie zum Modell mit reinen Verbrauchsänderungen fanden wir als geometrische Interpretation des solcher Art ermittelten Optimums, daß die gesamten bestellfixen Kosten der Summe aus Zinskosten und fiktiver Einstandskostenersparnis gleich sein müssen. Auch hier besteht bei steigenden Preisen grundsätzlich die Möglichkeit der Entartung. Es muß bei steigenden Preisen also in jedem Fall untersucht werden, ob die hinreichenden Bedingungen eines Minimums erfüllt sind. Im Fall der Entartung gilt der Lösungsansatz nicht. Das Optimum liegt hier bei einmaliger Bestellung der Gesamtmenge zum Zeitpunkt t_o.

Schlußbemerkungen

Eine kritische Sichtung der von der Literatur zum Problem der optimalen Bestellmenge bzw. Losgröße angebotenen Lösungen ergab, daß die Ansätze in der Regel von speziellen Annahmen (z.B. Identität der Planungsperiode mit dem Bestellintervall, gleich lange und in der Anzahl fixierte Intervalle, keine bestellfixen Kosten usw. usw.) ausgehen. Die genaue Analyse des Problems ergab zudem, daß die von einem Großteil der Literatur gesetzten Prämissen der Konstanz von Materialverbrauch und/oder Einstandspreis in der Mehrzahl der Fälle unrealistisch sind, daß vielmehr veränderlicher Materialverbrauch und veränderlicher Einstandspreis die allgemeinen Bedingungen zu sein scheinen, unter denen das Bestellproblem angegangen werden sollte. Damit stellte sich die Aufgabe, nach einer umfassenderen Lösung zu suchen, nach einer Lösung, die für alle denkbaren Verbrauchs- und Preisfunktionen bzw. für alle Kombinationen zwischen ihnen Gültigkeit hat.

Die Hauptschwierigkeit einer solchen Lösung besteht darin, daß eine optimale Aufteilung der gesamten zu beschaffenden Menge in Bestellmengen nicht ohne Kenntnis der optimalen Bestellhäufigkeit und diese wiederum nicht ohne Kenntnis der optimalen Aufteilungsweise festzulegen ist. Das Optimum der Bestellweise zeichnet sich also dadurch aus, daß für beide Parameter simultan optimale Werte gefunden werden müssen.

Im ersten Lösungsversuch wurde so vorgegangen, daß bei vorgegebener Länge der Planungsperiode und Anzahl der Bestellungen die optimale Aufteilungsweise abgeleitet wurde. Da die optimale Aufteilung sich als unabhängig von der gesamten zu bestellenden Menge (bzw. von der Länge der Planungsperiode) erwies und sich nur mit der Anzahl der Bestellungen veränderte, gelang es, die optimale Aufteilungsweise in eine Funktion der Bestellhäufigkeit zu bringen. Die Beschreibung der optimalen Bestellweise (also des simultanen Optimums von Auftei-

lungspolitik und Bestellhäufigkeit) führte zu Differentialgleichungen, deren Lösung beträchtliche analytische Schwierigkeiten zur Folge hatte. Ferner wurde die Lösung dem Ganzzahligkeitscharakter des Problems nicht gerecht, wie überhaupt das Ergebnis einer Interpretation nur schwer zugänglich war.

Die diskutierten Mängel führten zu einem realistischeren Lösungsansatz, der von dem Gedanken ausging, daß eine vorgegebene Gesamtmenge im allgemeinen nicht in einer ganzzahligen Anzahl von Bestellschritten optimal beschafft werden kann. Liegt aber die ermittelte optimale Bestellhäufigkeit zwischen zwei natürlichen Zahlen, so sind die Beschaffungskosten pro Stück unmöglich minimal, denn bei gleichen aufzuwendenden bestellfixen Kosten könnte eine größere als die vorgegebene Menge beschafft werden. Es wird also zweckmäßig die optimale Anzahl der Bestellschritte einer vorgegebenen Gesamtmenge (oder Planungsperiode) abgeschätzt und dann die Gesamtmenge solange in engen Grenzen verändert, bis die erforderlichen Bestellschritte ganzzahlig sind. Das auf diese Weise ermittelte Optimum der Bestellweise hatte den Vorteil, weitergehende Analysen zu ermöglichen.

Die optimale Bestellweise wurde determiniert durch die Parameter Zinsfuß, Größe des Änderungsvermögens der Verbrauchsfunktion, Größe und Vorzeichen des Änderungsvermögens der Preisfunktion sowie durch die Höhe der bestellfixen Kosten je Bestellintervall und der Anzahl der geplanten Bestellungen.

Rein rechentechnisch wurde so vorgegangen, daß durch Differentiation nach den n-1 Bestellzeitpunkten zunächst die optimale Relation der Bestellintervalle festgelegt und dann durch Differentiation nach dem Planungsendpunkt die absolute Länge der Planungsperiode bestimmt wurde, wodurch gleichzeitig alle Bestellintervalle in ihrer absoluten Länge determiniert sind.

Das Optimum der Bestellweise wurde im einfachsten Fall dadurch charakterisiert, daß die Zinskosten des kumulierten Verbrauchs abzüglich den Zinskosten aus den ersten n-1 kumulierten Bestellmengen gerade gleich den gesamten bestellfixen Kosten zu sein hatten. Bei kombinierten Verbrauchs- und Preisänderungen war das Optimum dann realisiert, wenn die eben genannte Zinskostendifferenz plus der durch die Bestellweise bewirkten Einstandskostenersparnis gerade gleich den gesamten bestellfixen Kosten wurde. Bezüglich weiterer Ergebnisse sei auf die Kapitelzusammenfassungen verwiesen.

Es konnte ferner gezeigt werden, daß für konstante und fallende Preise immer eine Bestellweise existiert, bei der die gesamten Beschaffungskosten pro Stück ein Minimum annehmen. Bei steigenden Preisen muß dagegen in jedem Einzelfall geprüft werden, ob ein Minimum der Beschaffungskosten pro Stück oder ein Entartungsfall, bedingt durch das Fehlen einer echten Wahlmöglichkeit, vorliegt.

Die Lösung ist für jede denkbare Verbrauchsfunktion mit den Eigenschaften stetig, differenzierbar und monoton steigend und für jede denkbare Preisfunktion mit den Eigenschaften stetig und differenzierbar sowie für beliebige Kombinationen zwischen ihnen gültig. Einschränkende Annahmen, die im Laufe der Untersuchung gemacht wurden, hatten lediglich den Sinn, bestimmte Zusammenhänge allgemeiner Art möglichst einfach darzustellen.

Literaturverzeichnis

A. Adam, Messen und Regeln in der Betriebswirtschaft, Würzburg 1959

Derselbe, Betriebliche Verfahrensforschung und Informationswesen, in: Führungsentscheidungen und ihre Dispositionshilfen, Vorträge des 11. dt. Betriebswirte-Tages, Berlin o.J., S. 34 ff.

M. Alfandary-Alexander, An Inquiry into some Models of Inventory Systems, Pittsburgh 1962

L.P. Alford, J.R. Bangs, Production Handbook, New York 1957

K. Andler, Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929

Arbeitsgemeinschaft für Rationalisierung des Landes Nordrhein-Westfalen, Lagerwirtschaft und Vereinheitlichung, Heft 43, Dortmund 1960

K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford/Cal. 1958

Arbeitskreis Weber-Hax der Schmalenbach-Gesellschaft, Der Einkauf im Industriebetrieb als unternehmerische und organisatorische Aufgabe, Köln-Opladen 1960

K.J. Arrow, T. Harris, J. Marschak, Optimal Inventory Policy, in: Econometrica 19/1951, S. 250-272

R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton/N.J. 1957

Derselbe, Some Directions of Research in Dynamic Programming, in: Unternehmensforschung 7/1963, S. 97-102

R. Bellman, I. Glicksberg, O. Gross, On the Optimal Inventory Equation, in: Management Science 2/1956, S. 83-104

H.H. Böhm, Wirtschaftliche Programmplanung nach Auftragsgrößen und Sorten durch Kalkulation mit Standard-Grenzpreisen und Deckungsbeiträgen, in: Taschenbuch für den Betriebswirt, Berlin u. Baden-Baden 1960, S. 127-203

T.M. Burnham, D.H. Bramlay, Engineering Economics, Vol. 2, Factory Organization and Management, 6. Aufl., London 1950

C.E. Clark, Mathematical Analysis of an Inventory Case, in: Operations Research 5/1957, S. 627-643

C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, Operations Research, dt. von E. Schlecht u. F. Ferschl, Wien 1961

W. Dahinden, Lagerbewirtschaftung, in: Industrielle Organisation, Zürich, 23/1954, S. 321-332

S. Danö, E.L. Jensen, Production and Inventory Planning in a Fluctuating Market, in: Operations Research 6/1958, S. 293-295

C. v. Dobbeler, Berechnung der wirtschaftlichsten Fertigungseinheit bei der Aufstellung eines Fertigungsplans, in: Betrieb 2/1920, S. 213-215

J.S. Dranoff, L.G. Mitten, W.F. Stevens, L.A. Wanninger jr., Application of Dynamic Programming to Countercurrent Flow Processes, in: Operations Research 9/1961, S. 388-401

A. Dvoretzki, J. Kiefer, J. Wolfowitz, The Inventory Problem, I. Case of Known Distributions of Demand, in: Econometrica 20/1952, S. 187-222

Dieselben, The Inventory Problem, II. Case of Unknown Distributions of Demand, in: Econometrica 20/1952, S. 450-466

Dieselben, On the Character of the (s,S) Policy in Inventory Theory, in: Econometrica 21/1953, S. 586-596

K. Dürr, Die Bemessung der Auflage in der Serienfabrikation, Bern 1952

A.R. Eagle, Distribution of Seasonal Inventory of an Hawaiian Pineapple Company, in: Operations Research 5/1957, S. 382-396

W. Eggemann, Auflagendegression und Lagerhaltung, in: ZfhF 26/1932, S. 376-379

Ph. Egerth, Probleme des Produktionsausgleichs, in: Unternehmensforschung 5/1961, S. 216-226

Th. Ellinger, Ablaufplanung, Stuttgart 1959

G.I. Feeney, A Basis for Strategic Decisions of Inventory Control Operations, in: Management Science 2/1956, S. 69-82

F. Ferschl, Zum Problem der optimalen Zusatzbestellung, in: Unternehmensforschung 5/1961, S. 121-131

Derselbe, Grundzüge des Dynamic Programming, in: Unternehmensforschung 3/1959, S. 70-80

R.B. Fetter, W.C. Dalleck, Decision Models for Inventory Management, Homewood/Ill. 1960

R.J. Freeman, (s,S) Policy with Variable Delivery Time, in: Management Science 3/1957, S. 431-434

P.T. Frenckner, Betriebswirtschaftslehre und Verfahrensforschung, in: ZfhF 9/1957, S. 65-102

P. Gebhardt-Seele, Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, München-Wien 1962

E. Grochla, Materialwirtschaft, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958

Derselbe, Beschaffungsorganisation, in: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3. Aufl., I. Band, Stuttgart 1956, Sp. 686-692

H. Guetzkow, H.A. Simon, The Impact of Certain Communication Nets upon Organization and Performance in Task Oriented Groups, in: Management Science 1/1955, S. 233-250

E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1: Die Produktion, 7. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962

G. Hadley, Th.M. Whitin, A Family of Inventory Models, in: Management Science 7/1961, S. 351 ff.

F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, New York-London 1962

F.W. Harris, Operations and Cost, Chicago 1915

H. Heger, Die Beschaffung unter besonderer Berücksichtigung ihrer Abhängigkeit vom Absatz- und Beschaffungsmarkt, Nürnberg 1957

K.W. Hennig, Betriebswirtschaftslehre der industriellen Erzeugung, Wiesbaden 1960

F. Henzel, Lagerwirtschaft, Essen 1950

IBM-Nachrichten, Tägliche vollautomatische Bestandsüberwachung und Auftragsdisposition nach dem Bestellpunktverfahren, in: Heft 130 (Mai 1957)

H. Ilg, Bestimmung der wirtschaftlichen Losgröße bei verschiedenen Produktionsabläufen, in: Werkstattstechnik 52/1962, S. 190-194

D.L. Iglehart, Optimality of (s,S) Policy in the Infinite Horizon Dynamic Inventory Problem, in: Management Science 9/1963, S. 259-267

W. Kern, Gestaltungsmöglichkeit und Anwendungsbereich betriebswirtschaftlicher Planungsmodelle, in: ZfhF 14/1962, S. 167-179

K. Klinger, Der Einkauf im Industriebetrieb, Essen 1950

Derselbe, Die Überwachung des Einkaufsvolumens in Industriebetrieben durch Kennziffern, in: Der Betrieb 11/1956, S. 689-690

A. Klingst, Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, in: Unternehmensforschung 1/1956, S. 166-172

Dieselbe, Zur optimalen Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfs, in: Unternehmensforschung 2/1958, S. 16-19

Dieselbe, Optimale Lagerhaltung bei bekannter Verteilung des Bedarfs und unter der Voraussetzung, daß diese Verteilung einen Jahresgang aufweist, in: Unternehmensforschung 2/1958, S. 140-147

V. Knecht, Terminwesen und Lagerhaltung in der Massenfertigung, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951

H. Koch, Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmungspolitik, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1961

Derselbe, Planung, in: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3. Aufl., III. Band, Stuttgart 1957, Sp. 4340-4352

Derselbe, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, in: Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift f. Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 367-423

Ch.A. Koepke, Plant Production Control, New York 1950

E. Kosiol, Einkaufsplanung und Produktionsumfang, Berlin 1956

Derselbe, Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge, in: ZfB 28/1958, S. 287-299

H. Kroner, Wirtschaftliche Losgröße und Fabrikationszeit, in: Werkstattstechnik 24/1930, S. 273-276

G. Liwschütz, Zur Errechnung der wirtschaftlichen Mindestmenge, in: Werkstattstechnik 24/1930, S. 273-276

W. Lücke, Die optimale Auflegungszahl, in: ZfB 27/1957, S. 344-360

J.F. Magee, Production Planning and Inventory Control, New York-Toronto-London 1958

S. Malich, Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB 27/1957, S. 448-457

Derselbe, nochmals: Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB 28/1958, S. 190-198

B. Margoninski, Wirtschaftliche Lagerhaltung, München-Berlin 1933

H. Markwort, Verfahren zur Abschätzung der günstigsten Seriengröße, in: Werkstatt und Betrieb, München, 95/1962, S. 221-225

D. Matthys, Die Materialwirtschaft im Industriebetrieb, Diss. Genf 1941

K. Mellerowicz, Planung und Plankostenrechnung, Freiburg i.Br. 1961

G. Meyer, Elemente zu einer Beschaffungstheorie des Betriebs, Basel 1951

F. Modigliani, F.E. Hohn, Production Planning over Time and the Nature of the Expectation and Planning Horizon, in: Econometrica 23/1955, S. 46-66

F. Morin, Note on an Inventory Problem, in: Econometrica 23/1955, S. 447-450

E. Naddor, Elements of Inventory Systems, in: Operations Research and Systems of Engineering, Baltimore 1960, S. 311-364

E. Naddor, S. Saltzman, Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs of Ordering, in: Operations Research 6/1958, S. 676-685

H. Narath, Die Ermittlung des wirtschaftlich günstigsten Lagerbestandes, des günstigsten Zeitpunktes der Nachbestellung und der Größe des Reserve-Lagerbestandes, in: ZfB IV/1927, S. 473-476

H. Oboth, Die unternehmerische Entscheidung, Diss. Berlin 1957

F. Ottel, Verschiedene Produktivitäten, in: ZfB 27/1957, S. 486-495

G. Pennington, Simple Formulas for Inventory Control, in: Manufacturing Industries, 13/1927, S. 199-203

J. Pfanzagl, Die Minimierung sinnloser Größen, in: Unternehmensforschung 4/1960, S. 149-155

B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, Diss. Göttingen 1962

H. Peters, Wirtschaftlichkeitsüberlegungen bei der Erzeugung von Sonderstählen in einem Hüttenwerk, in: Stahl und Eisen 80/1960, S. 35 ff.

H. Räuscher, Betriebsnotwendige Lagerreserve und optimale Losgröße, in: ZfB 27/1957, S. 687-693

F.E. Raymond, Quantity and Economy in Manufacturing, New York 1931

W. Rahm, Das Material im Fabrikbetrieb, Einkauf, Lagerung, Kontrolle und Verrechnung, Stuttgart 1929

G. Reddewig, H.A. Dubberke, Einkaufsorganisation und Einkaufsplanung, in: Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1959

K. Rummel, Einheitliche Kostenrechnung auf der Grundlage einer vorausgesetzten Proportionalität der Kosten zu betrieblichen Größen, 3. Aufl., Düsseldorf 1949

M.E. Salveson, A Problem in Optimal Machine Loading, in: Management Science 2/1956, S. 232-260

M. Sasieni, Dynamic Programming and Inventory Problems, in: Operational Research Quarterly 11/1960, S. 43 ff.

M. Sasieni, A. Yaspan, L. Friedman, Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, dt. von H.P. Künzi, Würzburg 1962

E. Schäfer, Losgröße und Kostengestaltung, in: ZfB 8/1931, S. 823-832

H. Schimmler, Der Lagerzyklus, Lagerbewegung und Konjunkturverlauf in empirischer Sicht, Berlin 1958

H. Schlüter, Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, Diss. Frankfurt/M. 1958

H. Schmidt, Die wirtschaftliche Mengeneinteilung des nationalen Bedarfs eines Erzeugnisses, Berlin 1942

E. Schneider, Wirtschaftlichkeitsrechnung, Tübingen u. Bern 1951

Derselbe, Absatz, Produktion und Lagerhaltung bei einfacher Produktion, in: Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Leipzig 4/1938, S. 99-113

W. v. Schütz, Unternehmensberatung, Arbeitsmethoden und Erfolgsaussichten, Essen 1961

M.B. Schupack, Economic Lot Sizes with Seasonal Demand, in: Operations Research 7/1959, S. 45-57

R.W. Shepard, Planung der geringsten Kosten täglicher lokaler Lieferungen, in: Unternehmensforschung 4/1960, S. 49-67

M.K. Starr, D.W. Miller, Inventory Control, Theory and Practice, Englewood Cliffs/N.J. 1962

K. Stefanic-Allmayer, Wirtschaftliche Lagerorganisation, Wien-Bregenz 1950

Derselbe, Die günstigste Bestellmenge beim Einkauf, in: Sparwirtschaft, Zeitschrift für den wirtschaftlichen Betrieb, Wien 1927, S. 504-508

C. Straub, Zur Frage der optimalen Losgröße bei Serienfabrikation, in: Schweiz. Zeitschrift für Betriebsführung 45/1945, S. 512-518

E. Sundhoff, Grundlagen und Technik der Beschaffung von Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffen, Essen 1958

A. Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry, New York 1958

Derselbe, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, dt. von W. Riedler, Wien 1962

Derselbe, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, in: Operations Research 5/1957, S. 28-45

H.M. Wagner, Th.M. Whitin, Dynamic Version of Economic Lot Size Model, in: Management Science 5/1959, S. 89-96

Dieselben, Dynamic Problems in the Theory of the Firm, in: Naval Research Logistic Quarterly 5/1958, S. 53-74

W. Weigmann, Bestimmung der optimalen Losgröße, in: Technik und Wirtschaft 29/1936, S. 45-47

Th.M. Whitin, The Theory of Inventory Management, Princeton/N.J. 1953

Derselbe, "Erich Schneiders Inventory Control", in: Journal of the Operations Research Society of America 2/1954, S. 329-334

A.M. Wolter, Das Problem der Wirtschaftlichkeit bei der industriellen Sortenproduktion, in: ZfhF 31/1937, S. 331-356; S. 374-402; S. 426-442

F. Zeidler, Der Kosteningenieur, Berlin 1929

H.J. Zimmermann, Mathematische Entscheidungsforschung, Berlin 1963

Lebenslauf

Am 22.2.1929 wurde ich als Sohn des Bergmanns August Kuhn und seiner Ehefrau Therese geb. Ringleb in Werne a.d. Lippe geboren.

In Werne besuchte ich vom Frühjahr 1935 bis zum Frühjahr 1943 die Volksschule. Daran schloß sich der Besuch der Lehrerbildungsanstalt Burg/Dithm. an, bis diese durch die Kriegsereignisse im Februar 1945 aufgelöst wurde.

Im Sommer 1952 legte ich am Abendgymnasium in Dortmund die Reifeprüfung ab.

Anschließend war ich zwei Jahre lang Redaktionsvolontär an einer Tageszeitung und arbeitete noch weitere zwei Jahre als Redakteur in den Ressorts Politik und Wirtschaft.

Im Sommersemester 1956 nahm ich mein betriebswirtschaftliches Studium an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster auf, legte im Sommer 1961 die Prüfung zum Diplom-Kaufmann ab und bin seit Herbst 1961 als wissenschaftliche Hilfskraft im Institut für Betriebsanalysen der Universität Münster tätig.